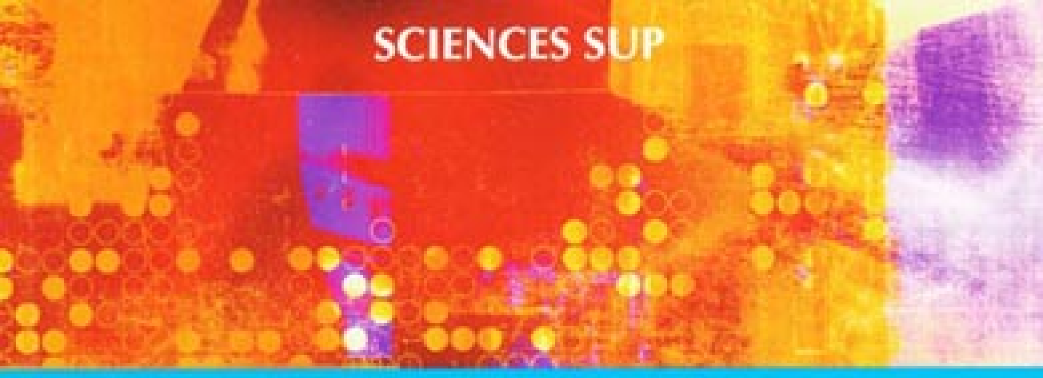


Cours et exercices corrigés

Master • Écoles d'ingénieurs

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Sylvie Pommier
Yves Berthaud



MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Cours et exercices corrigés

Sylvie Pommier
Professeur à l'École Normale Supérieure de Cachan

Yves Berthaud
Professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie



Illustration de couverture : *Digitalvision*

ISBN 978-2-10-054820-0

TABLE DES MATIÈRES

Deuxième partie

Action – Liaisons – Statique

Troisième partie

Conservation de l'énergie : premier principe

Quatrième partie

Principe fondamental de la dynamique, principe des puissances virtuelles

CINQUIÈME PARTIE

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

SIXIÈME PARTIE

QUELQUES RAPPELS MATHÉMATIQUES SUR LES TORSEURS ET LES TENSEURS

INTRODUCTION

Dans le langage courant, la mécanique est d'abord le domaine des machines (moteurs, véhicules, engrenages, poulies, arbres de transmission, piston...), bref, de tout ce qui produit ou transmet un mouvement ou bien s'oppose à ce mouvement. Pour les scientifiques, la mécanique est la discipline qui étudie les mouvements des systèmes matériels et les forces qui provoquent ou modifient ces mouvements. Les systèmes matériels étant très variés, de nombreuses branches de cette discipline co-existent. La mécanique générale (ou mécanique des systèmes de solides indéformables) qui est l'objet de cet ouvrage en est un exemple. Mais on peut également citer la mécanique des milieux continus (qui s'applique, comme son nom l'indique, aux milieux continus et continûment déformables), la mécanique statistique (qui s'applique aux milieux discrets, constitués d'un nombre considérable de composants), l'acoustique (qui s'applique aux gaz) ou la mécanique des fluides (qui s'applique aux liquides), la mécanique de la rupture (qui s'applique aux milieux fissurés), la mécanique des structures (plaques, poutres, coques)... La liste est longue même en se limitant à la mécanique non-relativiste.

Dans le cadre non-relativiste, déterminer les mouvements du système et les actions qui provoquent ces mouvements ou s'y opposent, consiste à établir un système d'équations en appliquant quatre principes fondamentaux :

- la conservation de la masse ;
- le principe fondamental de la dynamique (ou le principe des puissances virtuelles ou encore la conservation de la quantité de mouvement) ;
- la conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique) ;
- le second principe de la thermodynamique.

Ces « bons » principes s'appliquent, quelle que soit la branche de la mécanique considérée, mais avec un formalisme très différent selon les familles de mouvements étudiés. L'étape clef de la résolution d'un problème de mécanique est donc la modélisation du mouvement appelée aussi *la cinématique*.

Le choix d'une cinématique plutôt qu'une autre change radicalement la forme des objets manipulés pour représenter le mouvement ou les actions susceptibles de modifier le mouvement. Ainsi, en mécanique des milieux continus, le milieu étant continu, un seul espace est défini : celui qui contient le milieu. Dans cet espace, le mouvement est représenté par un champ de déformation et les actions mécaniques par un champ de contrainte.

Au contraire, en mécanique générale, le milieu est constitué de solides indéformables, il est donc *discontinu* par nature. Pour modéliser cette discontinuité, on travaillera dans une collection d'espaces (un espace par solide) en translation et en rotation les uns par rapport aux autres. Les mouvements se représentent alors par des objets appelés *torseurs cinématiques*, qui seront construits dans le premier chapitre. On leur associe des actions mécaniques appelées *torseurs des actions mécaniques*.

Le principe de conservation de la masse permet ensuite, via l'introduction d'une représentation condensée de la distribution de la masse dans un solide (masse, centre d'inertie, tenseur d'inertie d'un solide), d'exprimer les principes fondamentaux à l'échelle du solide, plutôt qu'à l'échelle d'un élément de volume de ce solide. Cette partie sera détaillée dans le chapitre cinétique.

Le mouvement et les principes fondamentaux s'écrivant alors à la même échelle (l'échelle du solide), les équations du mouvement peuvent être établies en s'appuyant sur le principe fondamental de la dynamique (ou la conservation de la quantité de mouvement ou encore le principe des puissances virtuelles). Cette approche conduit généralement à un système d'équations pour lequel le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues. Les équations complémentaires sont données par les lois de comportement, qui doivent vérifier le premier et le second principe de la thermodynamique. Ces lois de comportement seront très simples dans le cadre de la mécanique générale, par exemple :

- comportement rigide indéformable pour les solides ;
- lois de contact entre solides (lois de Coulomb) ;
- comportement de liaisons entre solides (liaison parfaites, élastiques ou visqueuses) ;
- lois d'action à distance (attraction gravitationnelle, par exemple).

Une fois que le système d'équations est établi, en utilisant par exemple la méthode de Lagrange, il peut être résolu pour déterminer les mouvements du système de solides indéformables étudié. Deux grands cadres peuvent être utilisés pour cette résolution. Le cadre des petits mouvements continus des solides, où les équations sont linéarisées en supposant que si la variation de position tend vers zéro, alors la variation de vitesse ou d'accélération en fait de même. Le cadre des chocs où cette hypothèse n'est pas valable, de très petites variations de position induisant de grandes variations de vitesses (lorsqu'une balle élastique entre en collision avec un mur, sa vitesse change brutalement de sens en conservant son module, alors que la balle n'a quasiment pas changé de position).

Pour terminer cette introduction, il est important de se convaincre que si les objets manipulés sont différents d'une branche à l'autre de la mécanique, les principes fondamentaux appliqués restent les mêmes. Il est donc possible de traiter un même problème avec deux approches différentes et d'obtenir des résultats identiques. Prenons par exemple un tas de sable sec, à l'échelle humaine il pourra être vu comme

un matériau déformable (le sable). À l'échelle des grains de sable, c'est un système de solides indéformables. Il pourra donc être modélisé dans deux cadres différents, la mécanique des milieux continus à l'échelle humaine, la mécanique générale à l'échelle des grains de sable, mais le résultat final doit être le même, puisqu'il s'agit bien du même tas de sable. Et nous ne parlons pas d'approches de type gaz qui peuvent s'appliquer aussi !

À l'inverse, la tour Eiffel est constituée de poutres et poutrelles déformables. Son mouvement peut être modélisé à l'échelle des poutres dans le cadre de la mécanique des poutres. Mais à l'échelle de la structure, le mouvement peut être simplifié et chaque poutre modélisée comme un assemblage de tiges rigides liées entre elles par des liaisons élastiques représentant la rigidité en flexion, torsion et traction-compression de la poutre. Encore une fois, il s'agit de la même tour Eiffel, et les résultats obtenus par ces différentes approches doivent être les mêmes.

Pour clore cette introduction nous signalons que cet ouvrage a pour objectif de réactualiser celui rédigé par J.-C. Bône, J. Morel et M. Boucher, réactualisation au sens de la mise en forme plus que des concepts, ceux-ci datant de quelques siècles. Nous avons repris bon nombre d'exercices et de figures issues d'un ouvrage récemment édité chez Dunod par l'un des auteurs avec de nombreux co-auteurs. Que ces derniers soient ici remerciés pour ces emprunts.

Partie I

Cinématique – Cinétique

CINÉMATIQUE 1

1.1 RÉFÉRENTIELS D'ESPACE ET DE TEMPS

Nous allons donner quelques éléments utiles pour la compréhension générale mais nous conseillons au lecteur de se reporter à l'excellent ouvrage de P. Rougée [2] qui définit de façon très précise et commentée toutes les notions mathématiques importantes. Les quelques lignes qui suivent s'en inspirent en partie.

La notion de temps ou de durée en mécanique classique est un concept autonome. On parlera d'instants t dans un ensemble $\mathcal{T}$ muni d'une chronologie. La différence entre deux instants est appelée durée. Les horloges – supposées galiléennes, terme qui sera précisé dans le chapitre dynamique – sont classiquement fondées sur des mouvements répétitifs : la rotation de la Terre a été le premier d'entre eux.

L'espace dans lequel nous allons travailler est celui qui nous entoure, modélisé par un espace affine réel euclidien de dimension trois. Il sera noté $\mathcal{E}$. Dans cet espace se trouvent des points qui peuvent constituer des droites ou des plans. Repérer des déplacements dans $\mathcal{E}$ conduit à la notion de vecteur qui appartient à un espace vectoriel noté E de dimension trois lui aussi. Le point A qui se sera déplacé pour se trouver en un point B de $\mathcal{E}$ conduit donc au vecteur déplacement noté $\mathbf{U} = \mathbf{AB}$.

Remarque

Dans cet ouvrage les vecteurs sont notés en gras (notation anglo-saxonne), par exemple $\mathbf{x}$, afin d'alléger l'écriture sachant que l'on trouve aussi comme notation $\underline{x}$ ou $\overrightarrow{x}$ dans d'autres ouvrages. Il n'y aura aucune confusion possible car nous ne manipulerons dans cet ouvrage que des scalaires x, des vecteurs $\mathbf{x}$ ou des torseurs constitués de vecteurs. Les tenseurs d'ordre deux seront évoqués à propos de tenseur d'inertie ou du vecteur rotation derrière lequel se cache un tenseur anti-symétrique. Nous donnons quelques informations opérationnelles sur les outils indispensables que sont les produits scalaire, vectoriel et mixte. Le lecteur est invité à se reporter à des ouvrages plus spécialisés pour plus de renseignements. Nous travaillerons dans tout ce cours avec des bases orthonormées directes. Il est donc important de savoir les construire rapidement. Nous utiliserons la méthode suivante (figure 1.1) : un premier vecteur unitaire $\mathbf{u}$ est tracé. Le deuxième $\mathbf{v}$ doit être directement perpendiculaire (avec un angle droit dans le sens trigonométrique). Le troisième en est déduit (par produit vectoriel) en utilisant la règle simple qui consiste à positionner le pouce (de la main droite) sur $\mathbf{u}$, l'index sur $\mathbf{v}$; le majeur replié pointe alors dans la troisième direction et permet de tracer $\mathbf{w}$.

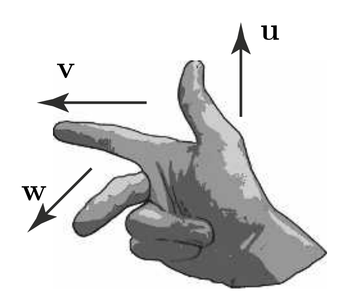


Figure 1.1 **Règle de la main droite pour le produit vectoriel.**

Le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Si ces vecteurs ont des composantes (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v) dans une base orthonormée on a :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

Si les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ font un angle θ (figure 1.2), on a :

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta.$$

Dans le cas où les deux vecteurs ont une norme unité, on a alors :

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\| = \cos\theta.$$

Les principales propriétés du produit scalaire sont :

- qu'il est symétrique $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$;
- qu'il est distributif sur l'addition des vecteurs $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$;
- que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

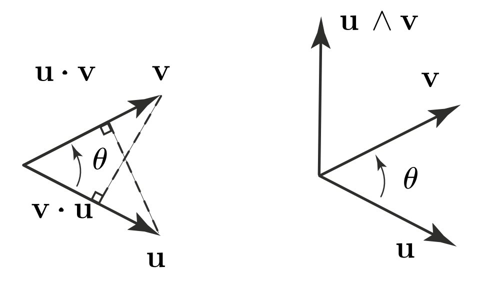


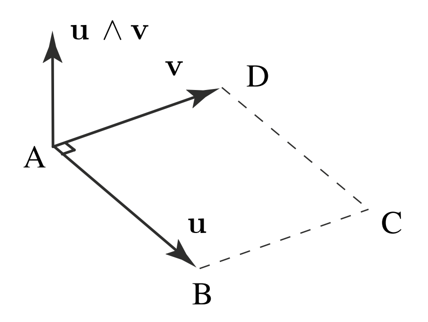
Figure 1.2 **Produits scalaire et vectoriel.**

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est noté $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Il s'agit d'un vecteur normal au plan contenant les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Si ces vecteurs ont des composantes (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v) dans une base orthonormée, on a :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (y_u z_v - z_u y_v)\,\mathbf{x} + (z_u x_v - x_u z_v)\,\mathbf{y} + (x_u y_v - y_u x_v)\,\mathbf{z}.$$

Si les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ font un angle θ, on a :

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \sin\theta.$$



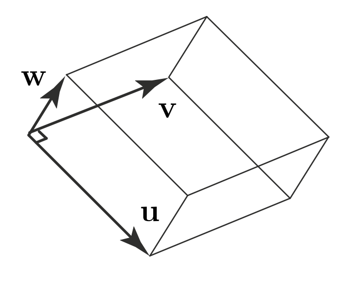


Figure 1.3 **Produit vectoriel et produit mixte.**

Le produit vectoriel $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ de deux vecteurs position $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (dont la dimension est une longueur L) représente l'aire orientée du parallélogramme formé par ces deux vecteurs (dimension L^2) dirigée selon la normale à ce parallélogramme (figure 1.3).

Les principales propriétés du produit vectoriel sont :

- qu'il est antisymétrique $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$;
- qu'il est distributif sur l'addition des vecteurs $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$;
- que deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Le produit mixte de trois vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ est noté $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. C'est par définition $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. Le produit mixte est inchangé par permutation circulaire directe :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}).$$

On a de la même manière les relations :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}),$$

ce qui signifie que pour toute permutation de deux termes du produit mixte, celui-ci change de signe. Le produit mixte $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ de trois vecteurs position $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ (dimension L) représente le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs (dimension L^3) (figure 1.3). On aura aussi besoin du double produit vectoriel

$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$. On montre les relations suivantes :

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{w},$$

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}.$$

Trièdre, base et repère d'espace. Nous appellerons **trièdre** l'ensemble noté T (O, x, y, z) défini par trois axes concourants en O de vecteurs unitaires $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ non coplanaires. Le plus souvent repère d'espace R et trièdre T sont confondus (ou se définissent mutuellement). On notera donc R, dans tout ce document, le repère d'espace constitué du point O et des axes Ox, Oy et Oz associé à la **base** constituée des trois vecteurs unitaires ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$). On notera (par abus mais cette notation est classique en mécanique) R (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$) ce repère. Lorsque ce repère sera associé à un solide particulier S_i le repère sera noté R_i et s'entendra comme constitué de $R_i = (O_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ sauf cas particulier qui sera indiqué.

Mouvement discontinu et repères d'espace. Dans un modèle mécanique, la première étape de la modélisation est la cinématique, c'est-à-dire la modélisation du mouvement. Si le milieu est assimilé à un ensemble de solides indéformables, le mouvement est discontinu au passage d'un solide à un autre solide. Plutôt que de chercher à modéliser les discontinuités du mouvement dans un seul espace $\mathcal{E}$, il a été choisi de représenter le mouvement à l'aide d'une collection d'espaces (un espace pour chaque solide) dans lesquels le mouvement est continu.

Remarque

La notion d'espace est donc centrale en mécanique générale, mais est parfois un peu délicate à manipuler. En effet, on associe un espace à un objet, mais cet espace est infini et ne s'arrête donc pas aux frontières de l'objet. Par conséquent, les espaces se recouvrent et plusieurs espaces coïncident en un même point M. Aussi doit-on généralement préciser à quel espace appartient le point M dont on décrit le mouvement.

Reprenons un exemple donné par Rougée [2]. Une mouette - perçue comme un point M – posée en haut du mât d'un bateau, se trouve, à un instant donné t, à la fois au sommet du mât et dans l'air, à x mètres de la surface de la mer et à y centaines de mètres de la côte. À l'instant t, trois espaces coïncident donc au point M, attachés respectivement à la mouette, au bateau et à l'espace géographique (la côte). Comme entre deux instants t et t' le bateau et la mouette se déplacent par rapport à la côte, la situation évolue. Ainsi, lorsqu'on écrit une expression aussi simple que *la vitesse du point* M *est parallèle à* $\mathbf{OM}$, le point M dont on suit le mouvement (la mouette, par exemple) doit être distingué du point M de l'espace géographique ($M \in$ air) qui permet de repérer une position ou la direction du vecteur vitesse à l'instant t.

Notion de référentiel du mouvement. Dans la collection d'espaces introduite pour décrire le mouvement d'un système de solides, l'un d'eux est défini comme le référentiel du mouvement. Cet espace sera considéré comme fixe, en première approximation, lors des opérations (calculs de vitesses ou d'accélération) qui

impliquent des dérivées par rapport au temps. Cette notion est tout à fait intuitive. Prenons un solide – la Terre par exemple – auquel nous associons un espace affine réel de dimension trois $\mathcal{E}$. Cet espace est attaché au solide, mais ne se limite pas à lui et s'étend à l'infini, l'espace $\mathcal{E}$ est tout entier entraîné par ce solide. Pour un mouvement se produisant au voisinage immédiat de la Terre, l'hypothèse est valide. En revanche, si le mouvement d'un objet se produit à l'échelle de l'espace de Copernic (une fusée interplanétaire) l'espace associé à la Terre ne sera pas utilisé comme référentiel du mouvement, puisque cet espace occupe successivement des espaces $\mathcal{E}_t$ dans l'espace de Copernic et ne peut certainement pas être considéré comme fixe à l'échelle du problème étudié.

1.2 Cinématique du point

On rappelle ici les définitions de la position, de la vitesse et de l'accélération d'un point M par rapport à un repère R (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$).

Le **vecteur position** du point M dans le repère R (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$), à l'instant t, est le vecteur $\mathbf{OM}(t)$.

La **trajectoire** T du point M est l'ensemble des points P de R avec lesquels coïncide M au cours de son mouvement au cours du temps t.

Le **vecteur vitesse** du point M par rapport au repère R, à l'instant t, est la dérivée du vecteur position $\mathbf{OM}(t)$ par rapport à t dans R. La dimension physique de la vitesse est LT^{-1}. Le vecteur vitesse du point M à l'instant t est tangent à la trajectoire en M(t).

$$\mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

Le **vecteur accélération** du point M par rapport au repère R, à l'instant t, est la dérivée du vecteur vitesse $\mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})$ par rapport à t, dans R. La dimension physique de l'accélération est LT^{-2}.

$$\mathbf{\Gamma}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

2 LE SOLIDE INDÉFORMABLE

2.1 DÉFINITION

Un solide est dit indéformable lorsque – quels que soient les points A et B de ce solide – la distance AB reste constante au cours du mouvement. On se limitera par la suite à appeler « solide » un solide indéformable. On peut imaginer que, dans l'exemple ci-dessous, les points A et B répondent bien à cette définition mais évidemment pas ceux qui se situent dans la zone du choc. L'étude du mouvement du solide S_2 par rapport au solide S_1 est identique à l'étude du mouvement de l'espace R_2 attaché au solide S_2 par rapport à l'espace R_1 attaché au solide S_1.



Figure 2.1 **Solide indéformable.**

2.2 PARAMÉTRAGE DE LA POSITION RELATIVE DE DEUX SOLIDES

Positionner le solide S_2 par rapport au solide S_1 revient donc à positionner le repère R_2 attaché au solide S_2, par rapport au repère R_1. La position du repère R_2 par rapport à R_1 est complètement déterminée si l'on se fixe :

1. **L'orientation de la base** de R_2 par rapport à celle de R_1. La base de R_1 est définie par deux vecteurs unitaires et orthogonaux, le troisième vecteur se déduisant des deux autres par un produit vectoriel. Trois paramètres indépendants sont donc nécessaires pour positionner l'orientation de la base $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$ par rapport à la base $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$.

2. **Les coordonnées de l'origine** O_2 du repère R_2 dans le repère R_1. Il existe plusieurs façons de définir ces coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques, curvilignes...). Quel que soit le système de coordonnées choisi, trois paramètres indépendants sont nécessaires pour positionner O_2 dans R_1.

2.2.1 Définition de l'orientation relative de deux bases

Dans un premier temps on cherche à définir l'orientation de la base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ du repère $R_2(O_2, x, y, z)$ par rapport à la base $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ du repère $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$. Cette orientation est toujours définie par trois paramètres. La méthode la plus générale consiste à représenter cette orientation par une rotation autour d'un vecteur unitaire instantané. C'est ce que l'on appelle la paramétrisation axio-angulaire. D'autres méthodes existent également, qui permettent de décomposer la rotation de la base 1 par rapport à celle de la base 2 en rotations élémentaires autour d'axes connus. Les deux méthodes les plus usuelles sont le paramétrage par les angles d'Euler et par les angles de Cardan dit aussi de « roulis, tangage, lacet », mais dix autres possibilités sont également possibles. Le lecteur pourra aussi se référer aux quaternions.

- *Paramétrisation axio-angulaire des rotations*

Notons Q l'opérateur de rotation d'angle α, autour d'un axe défini par le vecteur unitaire $\mathbf{e}$ de R , qui transforme un vecteur $\mathbf{a}$ de R en un vecteur $\mathbf{b}$. La composante du vecteur $\mathbf{a}$ portée par $\mathbf{e}$ est $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{e}$. Le complément, c'est-à-dire la composante de $\mathbf{a}$ dans le plan de normale $\mathbf{e}$ s'écrit $(-\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}))$ (figure 2.2). Le vecteur $\mathbf{a}$ s'écrit :

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{e} - \mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}).$$

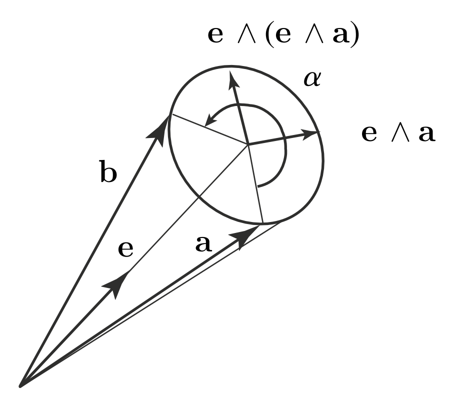


Figure 2.2 **Paramétrage axio-angulaire d'une rotation.**

Le vecteur $\mathbf{b}$, obtenu par rotation d'un angle α du vecteur $\mathbf{a}$ autour de $\mathbf{e}$ s'écrit alors (figure 2.2) :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{e} + \cos\alpha(-\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a})) + \sin\alpha(\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}),$$

ou encore :

$$\mathbf{b} = Q(\mathbf{a}) = (1 - \cos\alpha)(\mathbf{e}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{e} + \cos\alpha\,\mathbf{a} + \sin\alpha(\mathbf{e}\wedge\mathbf{a}).$$

L'opérateur rotation Q d'un angle α autour d'un vecteur $\mathbf{e}$ peut alors s'écrire :

$$\underline{\underline{Q}} = (1 - \cos\alpha)\,\mathbf{e}\otimes\mathbf{e} + \cos\alpha\underline{\underline{I}} + \sin\alpha\,\mathbf{e}^{\wedge},$$

où l'opérateur $\mathbf{e}^{\wedge}$ est tel que : $\mathbf{e}^{\wedge}(\mathbf{v}) = \mathbf{e}\wedge\mathbf{v} \quad \forall\mathbf{v}$. Nous demandons au lecteur de se reporter aux annexes pour la définition du produit tensoriel $\otimes$. La notation $\underline{\underline{Q}}$ correspond au tenseur d'ordre deux Q (l'opérateur mentionné plus haut).
Les vecteurs $\mathbf{e}$ et $\mathbf{a}$ étant fixes dans R, la vitesse du vecteur $\mathbf{b}$, en rotation autour de l'axe $\mathbf{e}$ vaut :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \dot{\alpha}\sin\alpha(\mathbf{e}\wedge(\mathbf{e}\wedge\mathbf{a})) + \dot{\alpha}\cos\alpha(\mathbf{e}\wedge\mathbf{a}).$$

En remarquant que :

$$\mathbf{e}\wedge\mathbf{b} = \cos\alpha(\mathbf{e}\wedge\mathbf{a}) + \sin\alpha(\mathbf{e}\wedge\mathbf{e}\wedge\mathbf{a}),$$

on en déduit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \dot{\alpha}(\mathbf{e}\wedge\mathbf{b}).$$

De cette expression découle la formule de changement de base de dérivation (p. 17).

L'opérateur vitesse de rotation $\Omega_R^{\wedge}$, autour d'un vecteur $\mathbf{e}$ de R à la vitesse $\dot{\alpha}$ peut alors s'écrire :

$$\underline{\underline{\Omega}}_R^{\wedge} = \dot{\alpha}\mathbf{e}^{\wedge}.$$

Remarque

Par la suite, on parlera **abusivement** de vecteur vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\alpha}\mathbf{e}$, mais on doit bien garder en mémoire qu'il ne s'agit en aucun cas d'un vecteur mais d'un tenseur d'ordre deux antisymétrique. Ce tenseur ayant trois composantes non nulles on peut décider de le représenter par un vecteur (c'est courant en mécanique des milieux continus avec le vecteur contrainte, le vecteur déformation et la matrice 6×6 de comportement). C'est donc par commodité qu'on note le tenseur vitesse de rotation comme un vecteur, mais ce pseudo-vecteur n'obéit pas aux règles habituelles applicables aux vecteurs. Par exemple, le produit scalaire de deux vecteurs vitesse de rotation n'a aucun sens. On pourra utiliser pour $\boldsymbol{\Omega}$ le terme de **pseudo-vecteur**.

- *Angles d'Euler*

Les angles d'Euler correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z})$ avec la base $(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{y}_1,\ \mathbf{z}_1)$. La première rotation d'angle ψ, autour de l'axe (O, z_1) permet de passer à une première base intermédiaire $(\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{z})$. L'angle ψ est appelé « angle de précession ».

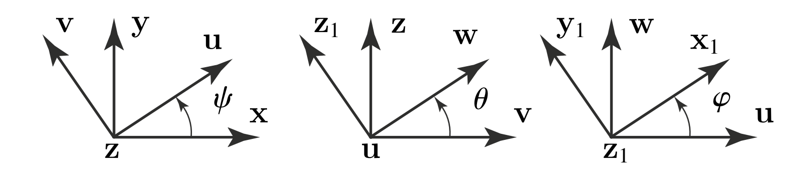


Figure 2.3 **Angles d'Euler.**

Une deuxième rotation d'angle θ est alors appliquée autour de l'axe (O, $\mathbf{u}$), de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une deuxième base intermédiaire $(\mathbf{u},\ \mathbf{w},\ \mathbf{z}_1)$. L'angle θ est appelé « angle de nutation ».
Une dernière rotation d'angle φ est appliquée autour de l'axe $(O, \mathbf{z}_1)$ de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base $(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{y}_1,\ \mathbf{z}_1)$. L'angle φ est appelé « angle de rotation propre ».
La composition de rotations planes successives permet de dessiner des figures de projection qui sont souvent très utiles pour la résolution des problèmes.

- *Angles de Cardan*

Les trois angles de cardan, ou « roulis, tangage, lacet » correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z})$ avec la base $(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{y}_1,\ \mathbf{z}_1)$. La première rotation d'angle θ, autour de l'axe (O, $\mathbf{x}$) permet de passer à une première base intermédiaire $(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{v})$. L'angle θ est appelé « angle de roulis ».
Une seconde rotation d'angle ψ, est alors appliquée autour de l'axe (O, $\mathbf{u}$), de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une seconde base intermédiaire $(\mathbf{u},\ \mathbf{z}_1,\ \mathbf{w})$. L'angle ψ est appelé « angle de tangage ».
Une dernière rotation d'angle μ est appliquée autour de l'axe (O, z_1) de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base $(\mathbf{z}_1,\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{y}_1)$. L'angle μ est appelé « angle de lacet ».

Ce paramétrage est habituellement employé pour paramétrer de petits mouvements du solide autour d'une base $(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z})$ définie à l'aide de la trajectoire du centre de gravité du solide dans le référentiel du mouvement R. La direction x, axe de roulis, est confondue avec la direction du vecteur vitesse du point O_1 par rapport au référentiel R. La direction (O, y), axe de tangage, est orthogonale à (O, x), dans le plan local défini par la trajectoire du point O_1. La direction (O, z), axe de lacet, est orthogonale au plan local défini par la trajectoire du point O_1.

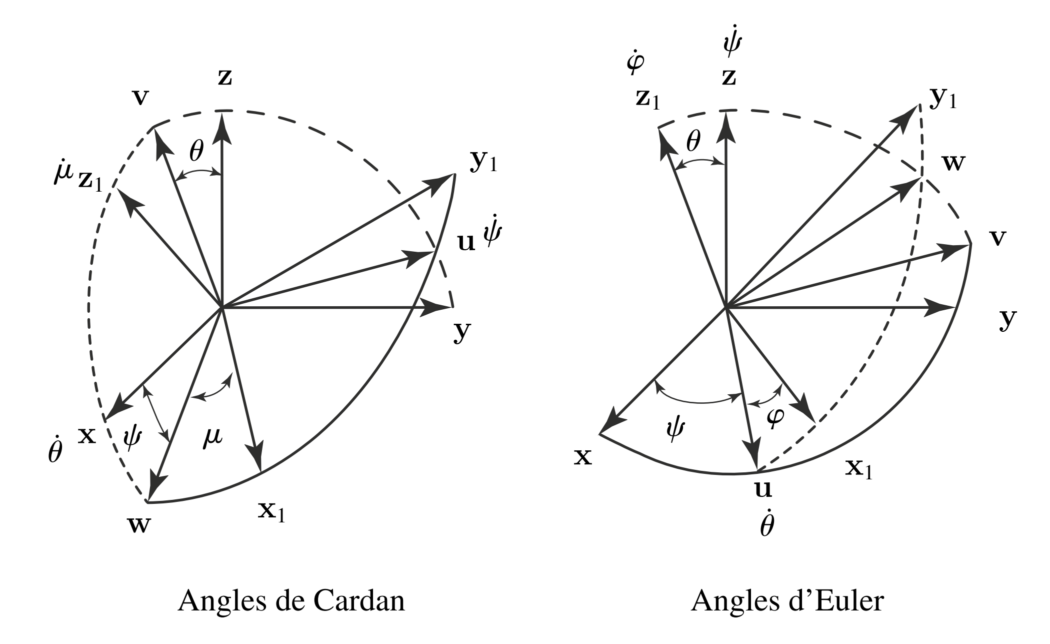


Figure 2.4 **Angles d'Euler et de Cardan.**

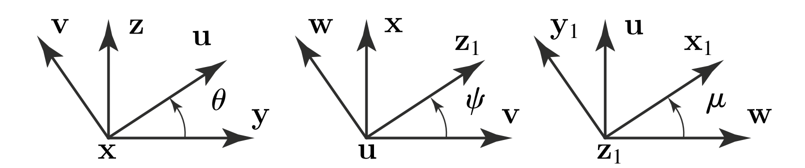


Figure 2.5 **Angles de Cardan.**

2.2.2 Systèmes de coordonnées

On cherche maintenant à positionner l'origine O_2 du repère R_2 dans un repère R_1. Il existe trois systèmes de coordonnées classiques : les coordonnées, cartésiennes, cylindriques et sphériques. Nous allons noter dans les figures qui suivent R et R_1 les deux repères et O l'origine de R. Nous nous intéressons aux coordonnées et à la vitesse d'un point M (le point O_2 précédent).

a) Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes, notées (x_M, y_M, z_M) du point M dans le repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sont les projections du vecteur $\mathbf{OM}$ sur chacun des axes (x, y, z) (voir figure 2.6).

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{OM} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{OM} \cdot \mathbf{z} = x_M \mathbf{x} + y_M \mathbf{y} + z_M \mathbf{z}.$$

En coordonnées cartésiennes, la vitesse du point M, par rapport au repère R s'écrit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{R} = \frac{\mathrm{d}x_M}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} + \frac{\mathrm{d}y_M}{\mathrm{d}t}\mathbf{y} + \frac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t}\mathbf{z} = \dot{x}_M\,\mathbf{x} + \dot{y}_M\,\mathbf{y} + \dot{z}_M\,\mathbf{z}.$$

On notera le plus souvent la dérivée par rapport au temps $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ de la façon suivante $\dot{x}$.

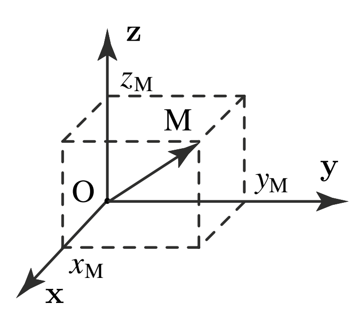


Figure 2.6 **Vecteur position pour un repérage cartésien.**

b) Coordonnées cylindriques

Pour définir les coordonnées cylindriques, il faut d'abord définir la projection H du point M dans le plan (O, x, y), puis un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de direction OH. Les coordonnées cylindriques du point M sont alors : r_M, norme du vecteur $\mathbf{OH}$, $\theta_M = (\mathbf{x},\ \mathbf{u})$, angle orienté dans le plan de normale z et z_M, projection de OM sur l'axe z :

$$\mathbf{OM} = r_M\mathbf{u} + z_M\mathbf{z}.$$

Les relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques sont données par :

$$x_M = r_M \cos\theta_M \quad y_M = r_M \sin\theta_M.$$

En coordonnées cylindriques, la vitesse du point M, par rapport au repère R s'écrit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{B_0} = \frac{\mathrm{d}r_M}{\mathrm{d}t}\mathbf{u} + r_M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} + \frac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t}\mathbf{z} = \dot{r}_M\,\mathbf{u} + r_M\dot{\theta}_M\mathbf{v} + \dot{z}_M\mathbf{z},$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{u}$. En effet, en appliquant la formule de changement de base de dérivation :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{B_0=(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{B_1=(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z})} + \boldsymbol{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \mathbf{OM}.$$

Soit

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{B_0=(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \frac{\mathrm{d}r_M}{\mathrm{d}t}\mathbf{u} + \frac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t}\mathbf{z} + \frac{\mathrm{d}\theta_M}{\mathrm{d}t}\mathbf{z} \wedge r_M\mathbf{u} + z_M\mathbf{z} = \dot{r}_M\,\mathbf{u} + \dot{z}_M\,\mathbf{z} + r_M\dot{\theta}_M\mathbf{v}.$$

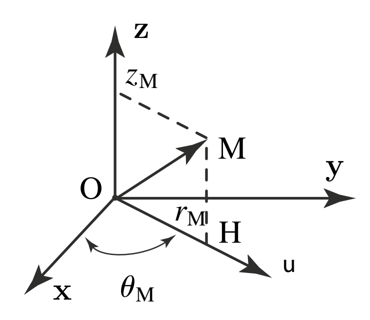


Figure 2.7 **Vecteur position pour un repérage cylindrique.**

c) Coordonnées sphériques

Pour définir les coordonnées sphériques, il faut d'abord définir la projection H du point M dans le plan (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$) puis un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de direction OH, et enfin un vecteur unitaire $\mathbf{w}$ de direction OM. Les coordonnées sphériques du point M sont alors :

ϱ_M = OM, la mesure algébrique de la distance OM ;

$\theta_M = (\mathbf{x}, \mathbf{u})$, angle orienté dans le plan de normale $\mathbf{z}$;

$\varphi_M = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$, angle orienté dans le plan de normale $\mathbf{v}$, où $\mathbf{v} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{u}$.

$$\mathbf{OM} = \varrho_M \mathbf{w}.$$

Les relations entre les coordonnées cartésiennes et sphériques :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_M & = & \varrho_M \sin\varphi_M \cos\theta_M, \\ y_M & = & \varrho_M \sin\varphi_M \sin\theta_M, \\ z_M & = & \varrho_M \cos\theta_M. \end{array} \right.$$

En coordonnées sphériques, la vitesse du point M, par rapport au repère R_1 s'écrit :

$$\left.\frac{d\mathbf{OM}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{\varrho}_M \, \mathbf{w} + \varrho_M \sin\varphi_M \, \dot{\theta}_M \, \mathbf{v} - \varrho_M \sin\varphi_M \, \dot{\varphi}_M \, \mathbf{z}.$$

En effet, en appliquant la formule de changement de base de dérivation :

$$\left.\frac{d\mathbf{OM}}{dt}\right|_{B_0=(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left.\frac{d\mathbf{OM}}{dt}\right|_{B_1=(\mathbf{n},\mathbf{v},\mathbf{w})} + \mathbf{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \mathbf{OM}.$$

Soit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{B_0=(\mathbf{x},\,\mathbf{y},\,\mathbf{z})} = \dot{\varrho}_M\,\mathbf{w} + (\dot{\theta}_M\,\mathbf{z} + \dot{\varphi}_M\,\mathbf{v}) \wedge (\varrho_M\mathbf{w}).$$

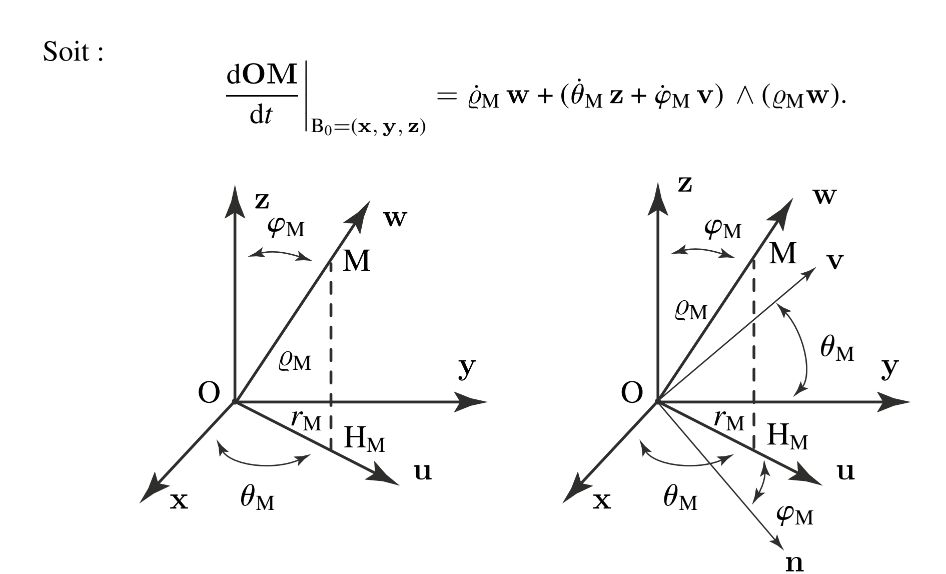


Figure 2.8 **Vecteur position pour un repérage sphérique.**

2.3 Cinématique du solide

2.3.1 Introduction, notations

Soit un point P_1 d'un solide S_1 en mouvement par rapport au repère R. Les vecteurs vitesse et accélération du point P_1 par rapport au repère R sont alors notés : $\mathbf{V}(P_1 \in S_1/R)$ et $\mathbf{\Gamma}(P_1 \in S_1/R)$. Cette notation permet de préciser à quel solide appartient le point dont on suit le mouvement lorsque plusieurs espaces coïncident au même point. Cela permet aussi de distinguer la vitesse d'un point appartenant à un solide, de la vitesse d'un point de l'espace n'appartenant à aucun solide, comme le point de contact P entre les solides S_1 et S_2. La vitesse du point P sera alors notée : $\mathbf{V}(P/R)$.

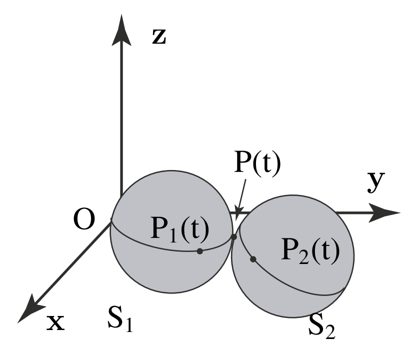


Figure 2.9 **Vitesses des points d'un solide.**

2.3.2 Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide : torseur cinématique

Supposons un référentiel du mouvement R_1 d'origine O_1 et un solide S_2 en mouvement par rapport à ce référentiel, auquel est attaché un repère R_2 d'origine O_2. La base attachée à R_2 a une vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}(R_2/R_1)$ par rapport à la base attachée à R_1. Supposons deux points quelconques A et B du solide S_2, alors en utilisant la paramétrisation axio-angulaire des rotations on peut écrire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} = \mathbf{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \mathbf{AB},$$

dont on déduit la formule de changement de point pour le champ des vecteurs vitesses des points d'un solide :

$$\forall A, \forall B \in S_2 \quad \mathbf{V}(B \in S_2/R_1) = \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) + \mathbf{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \mathbf{AB}.$$

La vitesse d'un point B quelconque du solide S_2 peut donc se calculer à partir de la vitesse d'un point A de S_2 et de la vitesse de rotation du solide par rapport au référentiel du mouvement. Le champ des vecteurs vitesses des points du solide S_2 par rapport à R_1 peut être représenté par un torseur, dit torseur cinématique, noté $\{\mathcal{V}\}$ (V comme vitesse) dont la résultante est la vitesse de rotation de la base B_2 par rapport à la base B_1 et le moment en un point A, la vitesse du point A appartenant au solide S_2, par rapport au repère R_1 :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_2/R_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \\ \\ \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) \end{array} \right\}_A .$$

Remarque

Nous indiquerons le point d'expression (ou de calcul) des torseurs en indice ce qui n'est pas une obligation puisqu'il est défini dans le moment du torseur. L'expérience indique que cela permet d'éviter des erreurs. Nous n'indiquerons jamais le point dans l'expression générique du type : $\left\{ \mathcal{V}(S_2/R_1) \right\}$ sauf cas particulier de relations de type composition.

Remarque

Nous manipulons des objets appelés vecteurs, vecteur position, vecteur vitesse ou encore vecteur vitesse de rotation. La notion de vecteur est différente en mathématiques et en mécanique ou en physique. Par exemple, dans notre cas, le vecteur est attaché (lié) au point dont on exprime la vitesse $\mathbf{V}(B \in S_2/R_1)$. Par ailleurs, certaines quantités sont notées, par commodité, sous forme de vecteurs (pseudo-vecteurs) mais n'obéissent pas aux même règles que les « vrais » vecteurs que sont les vecteurs déplacements ou vitesse de déplacement. C'est le cas déjà souligné, par exemple, du « vecteur vitesse de rotation ». C'est en raison de ces subtilités que seul le produit scalaire d'une force par une vitesse ou d'un moment par une vitesse de rotation a

un sens physique (une puissance). Le produit scalaire d'une force par une vitesse de rotation donne naissance à un être exotique ! Le lecteur peut se référer à l'ouvrage [2] par exemple pour trouver des compléments, en particulier sur les notions de tenseur antisymétrique d'ordre deux, de covariance ou de contravariance.

a) Équiprojectivité

Comme le champ des vecteurs vitesses d'un solide se représente par un torseur, c'est un champ équiprojectif. Cela signifie que quels que soient deux points A et B d'un solide S_2 :

$$\forall A, \forall B \in S_2 \quad \mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}(B \in S_2/R_1).$$

On peut aussi le montrer directement, à partir de la propriété d'indéformabilité du solide. Si S_2 est un solide indéformable, quels que soient A et B deux points appartenant à S_2 alors la distance AB reste constante au cours du temps. Cela s'écrit :

$$\frac{d(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AB})}{dt} = 0 = \left.\frac{d\mathbf{AB}}{dt}\right|_{R_1} \cdot \mathbf{AB}.$$

Cela s'écrit aussi :

$$\left.\frac{d(\mathbf{O_1B} - \mathbf{O_1A})}{dt}\right|_{R_1} \cdot \mathbf{AB} = \left[\mathbf{V}(B \in S_2/R_1) - \mathbf{V}(A \in S_2/R_1)\right] \cdot \mathbf{AB} = 0,$$

dont on déduit :

$$\forall A, B \in S_2 \quad \mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}(B \in S_2/R_1).$$

Le champ des vitesses des points d'un solide indéformable est donc bien équiprojectif. Cette propriété est utilisée en cinématique graphique pour résoudre graphiquement des problèmes de cinématique.
Nous insistons à ce stade sur la propriété importante d'équivalence entre champ équiprojectif et champ de moment de torseur. Cette démonstration est faite dans les annexes.

b) Calcul du vecteur rotation instantanée

D'après ce qui a été dit plus haut, la dérivée des vecteurs unitaires $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$ de la base du repère R_2 par rapport au référentiel R_1, se calcule comme suit :

$$\left.\frac{d\mathbf{x}_2}{dt}\right|_{R_1} = \mathbf{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \mathbf{x}_2.$$

On en déduit alors, si l'on connaît les dérivées des vecteurs unitaires :

$$2\mathbf{\Omega}(S_2/R_1) = \mathbf{x}_2 \wedge \left.\frac{d\mathbf{x}_2}{dt}\right|_{R_1} + \mathbf{y}_2 \wedge \left.\frac{d\mathbf{y}_2}{dt}\right|_{R_1} + \mathbf{z}_2 \wedge \left.\frac{d\mathbf{z}_2}{dt}\right|_{R_1}.$$

c) Mouvement de translation

Si le mouvement du solide S_2 par rapport à R_1 se représente par un torseur couple :

$$\{\ \mathcal{V}(S_2/R_1)\ \} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) \end{Bmatrix}_A \quad \forall A,$$

alors : $\forall A \in S_2 \quad \mathbf{V}(B \in S_2/R_1) = \mathbf{V}(A \in S_2/R_1)$. Le solide S_2 est en translation par rapport à R_1.

d) Mouvement de rotation instantanée

Si le mouvement du solide S_2 par rapport à R_1 se représente au point A, par un torseur résultante :

$$\{\ \mathcal{V}(S_2/R_1)\ \} = \begin{Bmatrix} \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_A,$$

alors : $\forall B \in S_2 \quad \mathbf{V}(B \in S_2/R_1) = \mathbf{BA} \wedge \mathbf{\Omega}(S_2/R_1)$. Le solide S_2 est en rotation par rapport à R_1 autour de l'axe central (Δ) du torseur cinématique. Cet axe central passe par le point A et sa direction est alignée avec $\mathbf{\Omega}$.

2.3.3 Champ des vecteurs accélération des points d'un solide

La formule de changement de base de dérivation permet de définir le champ des vecteurs accélération des points d'un solide, par rapport au référentiel du mouvement. Supposons un référentiel du mouvement R_1 et un solide S_2 en mouvement par rapport à ce référentiel, auquel est attaché un repère R_2. La base attachée à R_2 a une vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}$ par rapport à la base attachée à R_1. Supposons deux points quelconques A et B du solide S_2, alors :

$$\forall A,\ B \in S_2 \quad \mathbf{V}(B \in S_2/R_1) = \mathbf{V}(A \in S_2/R_1) + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{AB}.$$

La relation entre les vecteurs accélération des points A et B du solide S_2 dans son mouvement par rapport au repère R_1 s'obtient en dérivant les deux membres de cette égalité par rapport à t dans le repère R_1 :

$$\left.\frac{d\mathbf{V}(B \in S_2/R_1)}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\mathbf{V}(A \in S_2/R_1)}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d\big(\mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{AB}\big)}{dt}\right|_{R_1}.$$

Cela s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma}(B \in S_2/R_1) = \mathbf{\Gamma}(A \in S_2/R_1) + \left.\frac{d\big(\mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{AB}\big)}{dt}\right|_{R_1}.$$

En développant le dernier terme on obtient :

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{B} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1) + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1) \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1} + \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1} \wedge \mathbf{AB}.$$

Pour calculer la dérivée de $\mathbf{AB}$ par rapport à t, on utilise la formule de changement de base de dérivation, soit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{S}_2} + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1) \wedge \mathbf{AB} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1) \wedge \mathbf{AB}.$$

On en déduit la formule de changement de point du champ des vecteurs accélérations d'un solide :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{B} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1) &+ \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1} \wedge \mathbf{AB} \\ &+ \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1) \wedge \left(\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1) \wedge \mathbf{AB}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, le champ des vecteurs accélérations des points d'un solide ne peut pas être représenté par un torseur, du fait de l'existence du dernier terme. Ce point est très important et marque la différence entre champ des vitesses et des accélérations.

2.3.4 Composition des mouvements

a) Introduction

Soit un point P, appartenant à un solide S_2, en mouvement à la fois par rapport à un repère $\mathrm{R}_1(\mathrm{O}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ et par rapport à un repère $\mathrm{R}(\mathrm{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. On va chercher la relation entre les vecteurs vitesses $\mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R}_1)$ et $\mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R})$, ainsi que la relation entre les vecteurs accélération $\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{P}/\mathrm{R}_1)$ et $\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{P}/\mathrm{R})$. Ces relations, dites « de composition du mouvement », sont particulièrement utiles lorsqu'on étudie des mécanismes dans lesquels les mouvements relatifs mutuels des pièces sont connus, mais pas la cinématique d'ensemble du mécanisme.

b) Composition des vecteurs vitesse

On cherche à définir en premier lieu la relation entre $\mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R})$ et $\mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R}_1)$. On a :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OP}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R}_1) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{O}_1\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1}.$$

Donc :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{OO}_1 + \mathbf{O}_1\mathbf{P})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \mathbf{V}(\mathrm{O}_1 \in \mathrm{R}_1/\mathrm{R}) + \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{O}_1\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

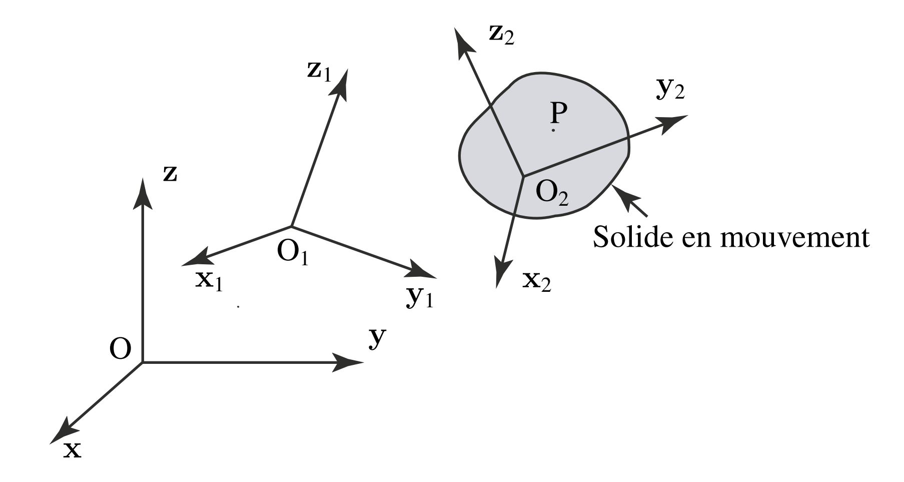


Figure 2.10 **Solide en mouvement.**

Par ailleurs :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{O_1P}}{\mathrm{d}t}\right|_{R} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{O_1P}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O_1P} = \mathbf{V}(P/R_1) + \mathbf{\Omega}(R_1/R) \wedge \mathbf{O_1P}.$$

Par suite : $\mathbf{V}(P/R) = \mathbf{V}(P/R_1) + \mathbf{V}(O_1 \in R_1/R) + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O_1P}$. Si maintenant on considère le point de R_1 qui coïncide avec P à l'instant t :

$$\mathbf{V}(P \in R_1/R) = \mathbf{V}(O_1 \in R_1/R) + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O_1P}.$$

Et donc :

$$\mathbf{V}(P/R) = \mathbf{V}(P/R_1) + \mathbf{V}(P \in R_1/R).$$

c) Définitions

Dans le mouvement du point P par rapport aux deux repères R et R_1, on appelle :

1. Vecteur vitesse absolue : $\mathbf{V}(P/R)$.
2. Vecteur vitesse relative : $\mathbf{V}(P/R_1)$.
3. Vecteur vitesse d'entraînement : $\mathbf{V}(P \in R_1/R)$.

d) Généralisation

Soit un point P mobile par rapport à n repères R_i (i=1, n). On peut écrire successivement :

$$\mathbf{V}(P/R_{n-1}) = \mathbf{V}(P/R_n) + \mathbf{V}(P \in R_n/R_{n-1}).$$

Ainsi :

$$\mathbf{V}(P/R_1) = \mathbf{V}(P/R_n) + \sum_{i=2}^{n} \mathbf{V}(P \in R_i/R_{i-1}).$$

e) Composition des torseurs cinématiques

Il a déjà été montré en utilisant la formule de changement de base de dérivation que lors de la composition des mouvements par rapport à n repères la relation :

$$\mathbf{\Omega}(\mathrm{R_n}/\mathrm{R_1}) = \sum_{\mathrm{i=2}}^{\mathrm{n}} \mathbf{\Omega}(\mathrm{R_i}/\mathrm{R_{i\text{-}1}}).$$

Comme par ailleurs :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_1}) = \mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_n}) + \sum_{\mathrm{i=2}}^{\mathrm{n}} \mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{R_i}/\mathrm{R_{i\text{-}1}}),$$

on peut donc écrire :

$$\left\{ \mathcal{V}(\mathrm{R_i}/\mathrm{R_{i\text{-}1}}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{\Omega}(\mathrm{R_i}/\mathrm{R_{i\text{-}1}}) \\ \mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{R_i}/\mathrm{R_{i\text{-}1}}) \end{array} \right\}.$$

La relation de composition des torseurs cinématiques s'écrit (au même point évidemment) :

$$\left\{ \mathcal{V}(\mathrm{R_n}/\mathrm{R_1}) \right\} = \sum_{\mathrm{i=2}}^{\mathrm{n}} \left\{ \mathcal{V}(\mathrm{R_i}/\mathrm{R_{i\text{-}1}}) \right\}.$$

Exemple

L'objectif de cet exemple est d'illustrer la distinction entre le vecteur vitesse absolue d'un point I, $\mathbf{V}(\mathrm{I}/\mathrm{R})$ et son vecteur vitesse d'entraînement $\mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S_1}/\mathrm{R})$ par un solide $\mathrm{S_1}$. Supposons deux roues de friction $\mathrm{S_1}$ et $\mathrm{S_2}$. $\mathrm{S_1}$ est en rotation autour de l'axe (O, z) et $\mathrm{S_2}$ autour de l'axe (A, z). On pose : $\mathbf{\Omega}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_1}) = \omega_1 \mathbf{z}$ et $\mathbf{\Omega}(\mathrm{S_2}/\mathrm{R}) = \omega_2 \mathbf{z}$. Les deux roues de friction sont en contact au point I : $\mathbf{OI} = r_1 \mathbf{y}$ et $\mathbf{AI} = -r_2 \mathbf{y}$. Le vecteur vitesse absolue du point de contact I par rapport au repère R s'obtient en dérivant le vecteur position du point I :

$$\mathbf{V}(\mathrm{I}/\mathrm{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OI}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}r_1\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \mathbf{0}.$$

Le vecteur vitesse du point du solide $\mathrm{S_1}$ qui à l'instant t coïncide avec I, noté $\mathrm{I} \in \mathrm{S_1}$, est le vecteur vitesse d'un point du solide $\mathrm{S_1}$ qui décrit un cercle de centre O et de rayon r_1 à la vitesse ω_1. C'est-à-dire qu'on calcule la vitesse au point noté $\mathrm{I} \in \mathrm{S_1}$, comme si ce point appartenait physiquement à $\mathrm{S_1}$. Soit :

$$\mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S_1}/\mathrm{R}) = \mathbf{V}(\mathrm{O} \in \mathrm{S_1}/\mathrm{R}) + \mathbf{\Omega}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_1}) \wedge \mathbf{OI} = \mathbf{0} + \omega_1 \mathbf{z} \wedge r_1 \mathbf{y} = -r_1 \omega_1 \mathbf{x}.$$

Le vecteur vitesse du point du solide $\mathrm{S_2}$ qui à l'instant t coïncide avec I, noté $\mathrm{I} \in \mathrm{S_2}$, est le vecteur vitesse d'un point qui décrit un cercle de centre A et de rayon r_2 à la vitesse ω_2 ; on a $\mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S_2}/\mathrm{R}) = \omega_2 r_2 \mathbf{x}$.

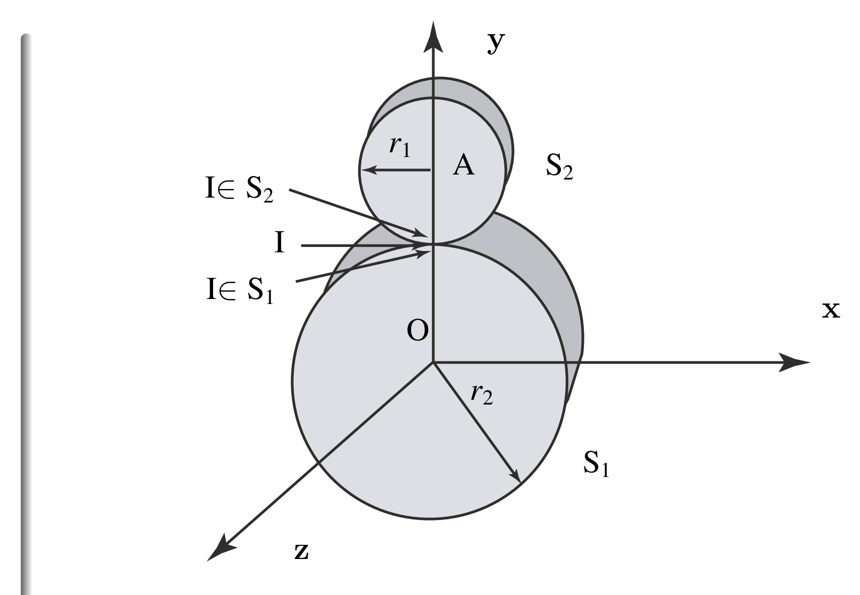


Figure 2.11 Solide en mouvement.

f) Composition des vecteurs accélération

Soit un point P, appartenant à un solide S_2, en mouvement à la fois par rapport à un repère $R_1(O_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ et par rapport à un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. On va chercher maintenant la relation entre les vecteurs accélération $\mathbf{\Gamma}(P/R_1)$ et $\mathbf{\Gamma}(P/R)$.

- *Relation de composition des vecteurs accélération*

Il a été montré aux paragraphes précédents que : $\mathbf{V}(P/R) = \mathbf{V}(P/R_1) + \mathbf{V}(P \in R_1/R)$ ce qui s'écrit aussi :

$$\mathbf{V}(P/R) = \mathbf{V}(P/R_1) + \mathbf{V}(O_1 \in R_1/R) + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O_1P}.$$

Dérivons chaque terme par rapport au temps dans le repère R :

$$\left.\frac{d\mathbf{V}(P/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\mathbf{V}(P/R_1)}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\mathbf{V}(O_1 \in R_1/R)}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\left(\mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{O_1P}\right)}{dt}\right|_R.$$

Soit, en appliquant la formule de changement de base de dérivation au premier terme :

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\mathbf{V}(P/R_1)}{dt}\right|_R &= \left.\frac{d\mathbf{V}(P/R_1)}{dt}\right|_{R_1} + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{V}(P/R_1)\\ &= \mathbf{\Gamma}(P/R_1) + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{V}(P/R_1).\end{aligned}$$

Comme O_1 est l'origine du repère R_1 :

$$\left.\frac{d\mathbf{V}(O_1 \in R_1/R)}{dt}\right|_R = \mathbf{\Gamma}(O_1 \in R_1/R).$$

Enfin, en appliquant la formule de changement de base de dérivation au dernier terme :

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{\Omega}(S_2/R_1)\wedge \mathbf{O_1P})}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Omega}(S_2/R_1)}{\mathrm{d}t}\right|_R \wedge \mathbf{O_1P} + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1)\wedge \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{O_1P}}{\mathrm{d}t}\right|_R$$
$$= \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Omega}(S_2/R_1)}{\mathrm{d}t}\right|_R \wedge \mathbf{O_1P} + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1)\wedge\left[\mathbf{V}(P/R_1) + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1)\wedge \mathbf{O_1P}\right].$$

Comme, par ailleurs, d'après la formule de changement de point du champ de vecteurs accélérations :

$$\mathbf{\Gamma}(P\in R_1/R) = \mathbf{\Gamma}(O_1\in R_1/R) + \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Omega}(R_1/R)}{\mathrm{d}t}\right|_R \wedge \mathbf{O_1P} + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1)\wedge\big(\mathbf{\Omega}(R_1/R)\wedge\mathbf{O_1P}\big),$$

on en déduit en regroupant tous les termes :

$$\mathbf{\Gamma}(P/R) = \mathbf{\Gamma}(P/R_1) + \mathbf{\Gamma}(P\in R_1/R) + 2\,\mathbf{\Omega}(S_2/R_1)\wedge \mathbf{V}(P/R_1).$$

g) Définitions

Dans le mouvement du point P par rapport aux repères R et R_1, on appelle :

1. Vecteur accélération absolue : $\mathbf{\Gamma}(P/R)$.
2. Vecteur accélération relative : $\mathbf{\Gamma}(P/R_1)$.
3. Vecteur accélération d'entraînement : $\mathbf{\Gamma}(P\in R_1/R)$.
4. Vecteur accélération de Coriolis (Gustave Gaspard Coriolis, mathématicien français, 1792-1843) : $2\,\mathbf{\Omega}(S_2/R_1)\wedge \mathbf{V}(P/R_1)$.

Exemple

Pour comprendre les accélérations relatives, d'entraînement et de Coriolis l'exemple (figure 2.12) est simple. Soit un point M fixe dans un repère R et tel que que $\mathbf{OM} = a\mathbf{x}$. On considère un plateau situé dans le plan horizontal $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ lequel tourne autour de $(O, \mathbf{z})$ à la vitesse ω. On associe le repère R_1 à ce plateau. Le point M étant fixe dans R, la vitesse absolue $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}(M/R)$ est nulle. On peut cependant calculer sa vitesse relative dans R_1 qui est :

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V}(M/R_1) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} = -a\omega\sin\omega t\,\mathbf{x}_1 - a\omega\cos\omega t\,\mathbf{y}_1.$$

Si on calcule la vitesse d'entraînement $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}(M\in R_1/R)$ on trouve par la formule de changement de point du champ des vitesses :

$$\mathbf{V}(M\in R_1/R) = a\omega\sin\omega t\,\mathbf{x}_1 + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{y}_1.$$

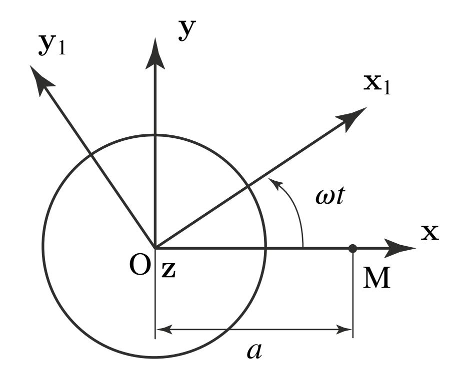


Figure 2.12 **Plateau tournant et point M fixe dans R.**

On constate que ce vecteur est égal à $-\mathbf{V}_\mathrm{r}$ ce qui est logique puisque l'on a la relation :

$$\mathbf{V}_\mathrm{a} = \mathbf{V}_\mathrm{r} + \mathbf{V}_\mathrm{e} \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}_\mathrm{a} = \mathbf{0}.$$

Si on procède ainsi pour les accélérations on trouve :

$$\mathbf{\Gamma}_\mathrm{r} = \mathbf{\Gamma}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_1) = a\omega^2 \cos \omega t \, \mathbf{x}_1 - a\omega^2 \sin \omega t \, \mathbf{x}_1,$$

qui peut se transformer de la façon suivante :

$$\mathbf{\Gamma}_\mathrm{r} = (-a\omega^2 \cos \omega t \, \mathbf{x}_1 + 2a\omega^2 \cos \omega t \, \mathbf{x}_1) + (a\omega^2 \sin \omega t \, \mathbf{y}_1 - 2a\omega^2 \sin \omega t \, \mathbf{y}_1).$$

L'accélération d'entraînement vaut :

$$\mathbf{\Gamma}_\mathrm{e} = \mathbf{\Gamma}(\mathrm{M} \in \mathrm{R}_1/\mathrm{R}) = a\omega^2 \cos \omega t \, \mathbf{x}_1 - a\omega^2 \sin \omega t \, \mathbf{y}_1,$$

tandis que l'accélération de Coriolis s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma}_\mathrm{c} = 2\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_1/\mathrm{R}) \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_1) = 2a\omega^2 \cos \omega t \, \mathbf{x}_1 - 2a\omega^2 \sin \omega t \, \mathbf{y}_1.$$

On trouve donc bien en comparant l'accélération relative aux deux accélérations d'entraînement et de Coriolis que :

$$\mathbf{\Gamma}_\mathrm{r} = -\mathbf{\Gamma}_\mathrm{e} - \mathbf{\Gamma}_\mathrm{c}.$$

Cela est à nouveau logique puisque $\mathbf{\Gamma}_\mathrm{a} = \mathbf{0}$. Cet exemple illustre le fait que ces accélérations ne sont que la conséquence du mouvement du repère R_1 dans lequel nous nous sommes placés et qui correspond, par exemple, à la visée depuis la Terre d'une étoile fixe. Il faut bien, puisque nous tournons avec le repère sur lequel nous sommes (le plateau ou la Terre) qu'il y ait ces accélérations de façon à ce que le point M reste fixe dans R. Lorsque nous arriverons au chapitre dynamique nous pourrons penser à cet exemple qui fera apparaître des forces (fictives) associées à ces accélérations d'entraînement et de Coriolis.

EXEMPLE : TIR AU BUT !

- *Énoncé du problème*

Calculons la vitesse et l'accélération du coup du pied d'un footballeur au moment de l'impact avec le ballon. Ces paramètres contrôlent la trajectoire ultérieure du ballon. Pour cela, on considère que le référentiel du mouvement $R_0(H, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$, attaché à l'articulation H de la hanche est fixe par rapport au sol. La hanche est modélisée comme une liaison pivot, d'axe $\mathbf{z}_0$ et de degré de liberté α, autour de laquelle tourne le repère attaché à la cuisse $R_1(H, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0)$. Le genou est modélisé comme une liaison pivot, d'axe $\mathbf{z}_0$ et de degré de liberté β, autour de laquelle tourne le repère attaché au mollet $R_2(G, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_0)$. La distance hanche-genou est notée $HG = l_1$, la distance genou-cheville est notée $GP = l_2$. Les valeurs initiales de α et β sont négatives, leurs vitesses $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ sont positives. À l'instant où le pied touche le ballon, on suppose que $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{y}_2$ sont confondus et $\alpha = \beta = 0$. Deux cas sont distingués. Dans le premier cas, la jambe du footballeur travaille en « double pendule », ses deux articulations sont actives au moment de l'impact. Dans le second cas, il a fini de déplier le genou au moment de l'impact $\dot{\beta} = 0$, seule l'articulation de la hanche est encore active $\dot{\alpha} \neq 0$.

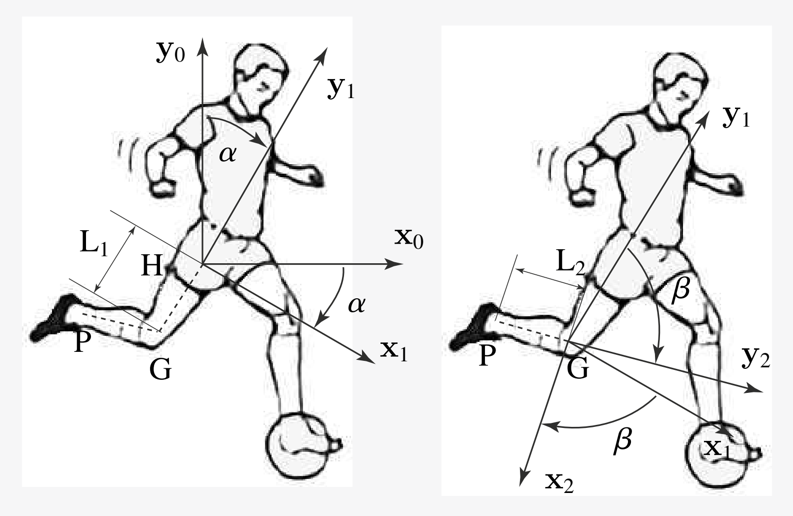


Figure 2.13 La jambe du footballeur fonctionne comme un double pendule. L'accélération transmise au ballon est maximale lorsque les vitesses de rotation des deux articulations atteignent leurs maxima simultanément à l'instant de l'impact.

- *Solution*

On calcule d'abord le vecteur position :

$$\mathbf{HP} = \mathbf{HG} + \mathbf{GP} = -l_1\mathbf{y}_1 - l_2\mathbf{y}_2.$$

On en déduit le vecteur vitesse par la formule de changement de point et de changement de base de dérivation :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) = \mathbf{V}(\mathrm{G} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) \wedge \mathbf{GP}.$$

Le genou appartenant à la fois au mollet et la la cuisse, il vient :

$$\mathbf{V}(\mathrm{G} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) = \mathbf{V}(\mathrm{G} \in \mathrm{R}_1/\mathrm{R}_0) = \mathbf{V}(\mathrm{H} \in \mathrm{R}_1/\mathrm{R}_0) + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_1/\mathrm{R}_0) \wedge \mathbf{HG}.$$

En remplaçant les termes par leurs expressions, il vient :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) = \dot{\alpha}\mathbf{z}_0 \wedge (-l_1\mathbf{y}_1) + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\mathbf{z}_0 \wedge (-l_2\mathbf{y}_2),$$

ou encore :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) = \dot{\alpha} l_1 \mathbf{x}_1 + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})x_2.$$

On procède de même pour le calcul de l'accélération :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) = {} & \boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{G} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) \\ & + \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_0} \wedge \mathbf{GP} + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) \wedge \left(\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) \wedge \mathbf{GP}\right),\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{G} \in \mathrm{R}_1/\mathrm{R}_0) & = \boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{H} \in \mathrm{R}_1/\mathrm{R}_0) + \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_1/\mathrm{R}_0)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_0} \wedge \mathbf{HG} \\ & \quad + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_1/\mathrm{R}_0) \wedge \left(\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_1/\mathrm{R}_0) \wedge \mathbf{HG}\right).\end{aligned}$$

En remplaçant les termes par leurs expressions, il vient :

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) = l_1\ddot{\alpha}x_1 + l_1\dot{\alpha}^2 y_1 + l_2(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})x_2 + l_2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 y_2.$$

À l'impact, lorsque la jambe travaille en « double pendule », la vitesse maximale de rotation étant atteinte pour les deux articulations au moment de l'impact, avec $\dot{\alpha} = \dot{\beta}$, et $l_1 = l_2 = l$, il vient :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) = 3\dot{\alpha}l\,\mathbf{x}_0 \text{ et } \boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) = 5l\dot{\alpha}^2\,\mathbf{y}_0.$$

Dans le cas contraire, si $\dot{\alpha} \neq 0$ et $\dot{\beta} = 0$, il vient :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) = 2\dot{\alpha}l\,\mathbf{x}_0 \text{ et } \boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2/\mathrm{R}_0) = 2\dot{\alpha}^2 l\,\mathbf{y}_0.$$

La conclusion de cet exercice est qu'il vaut mieux – au regard de la vitesse du point d'impact – que la jambe travaille en double pendule plutôt qu'en pendule simple. Cette conclusion a pu être obtenue par tout joueur de football (ou de rugby) qui souhaite dégager son camp dans l'urgence ou obtenir une pénalité éloignée.



Cinématique du point

Vecteur vitesse (resp. accélération) du point P, par rapport à R, à l'instant t :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P/R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OP}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} \qquad \mathbf{\Gamma}(\mathrm{P/R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(\mathrm{P/R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

Cinématique du solide

Vecteur vitesse (resp. accélération) du point P, appartenant au solide S_1 par rapport à R, à l'instant t :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{S_1/R}) \text{ et } \mathbf{\Gamma}(\mathrm{P} \in \mathrm{S_1/R}).$$

Formules de changement de point

• *Formules de changement de point du champ des vecteurs vitesse d'un solide*

$$\forall \mathrm{A}, \forall \mathrm{B} \in \mathrm{S_1} \quad \mathbf{V}(\mathrm{B} \in \mathrm{S_1/R}) = \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S_1/R}) + \mathbf{\Omega}(\mathrm{S_1/R}) \wedge \mathbf{AB}.$$

Le champ des vecteurs vitesses des points du solide S_1 en mouvement par rapport à R, se représente par un torseur, dit **torseur cinématique**

$$\{\mathcal{V}(\mathrm{S_1/R})\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{\Omega}(\mathrm{S_1/R}) \\ \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S_1/R}) \end{array}\right\}_{\mathrm{A}}.$$

• *Formules de changement de point du champ des vecteurs accélération d'un solide*

$$\mathbf{\Gamma}(\mathrm{B} \in \mathrm{S_1/R}) = \mathbf{\Gamma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S_1/R}) + \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Omega}(\mathrm{S_1/R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} \wedge \mathbf{AB} + \mathbf{\Omega}(\mathrm{S_1/R}) \wedge \left(\mathbf{\Omega}(\mathrm{S_1/R}) \wedge \mathbf{AB}\right).$$

Le champ des vecteurs accélération des points du solide S_1 en mouvement par rapport à R, ne se représente pas par un torseur.

Formules de composition des mouvements

On suppose un point P en mouvement par rapport à un solide S_1 auquel est attaché un repère R_1, lui-même en mouvement par rapport au référentiel du mouvement R. On note $P \in R_1$ le point du solide S_1 qui à l'instant t, coïncide avec P alors :

$$\underbrace{\mathbf{V}(\mathrm{P/R})}_{\text{absolue}} = \underbrace{\mathbf{V}(\mathrm{P/R_1})}_{\text{relative}} + \underbrace{\mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{R_1/R})}_{\text{entraînement}}.$$

$$\underbrace{\mathbf{\Gamma}(\mathrm{P/R})}_{\text{absolue}} = \underbrace{\mathbf{\Gamma}(\mathrm{P/R_1})}_{\text{relative}} + \underbrace{\mathbf{\Gamma}(\mathrm{P} \in \mathrm{R_1/R})}_{\text{entraînement}} + \underbrace{2\,\mathbf{\Omega}(\mathrm{R_1/R})) \wedge \mathbf{V}(\mathrm{P/R_1})}_{\text{Coriolis}}.$$

Exercices

Ces exercices sont destinés à mettre en application les notions du chapitre. Les solutions détaillées sont données ensuite. Nous utiliserons souvent pour alléger les écritures $\mathbf{\Omega}(S_2/S_3) = \mathbf{\Omega}(2/3) = \omega_{23}\mathbf{z}$ par exemple. La plupart des exercices de cette partie sont du niveau L2 (à part quelques subtilités liées à l'utilisation des axes centraux peu usités à ce niveau).

2.1 Centrifugeuse de laboratoire

On s'intéresse à une centrifugeuse de laboratoire présentée ci-dessous, composée d'un bâti S_0, d'un bras S_1 et d'une éprouvette S_2 contenant deux liquides de masses volumiques différentes. Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du bras S_1 l'éprouvette S_2 s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras. De fait, le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté au fond de l'éprouvette. Paramétrage du système :

- $R\ (O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ est un repère lié à S_0.
- S_1 est en liaison pivot d'axe $(O, \mathbf{x})$ avec S_0. Le repère $R_1(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ est un repère lié à S_1, on note $\alpha = (\mathbf{y}, \mathbf{y}_1)$ l'angle mesuré autour de $\mathbf{x}$.
- S_2 est en liaison pivot d'axe $(A, \mathbf{z}_1)$ avec S_1. Le repère $R_2(A, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$ est un repère lié à S_2, on note $\beta = (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)$ l'angle mesuré autour de $\mathbf{z}_1$.
- On donne $\mathbf{OA} = a\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{AG} = b\mathbf{x}_2$, où a et b sont des constantes positives exprimées en mètres.

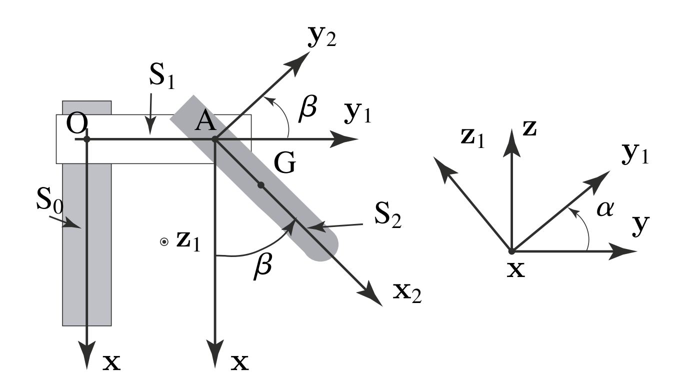


Figure 2.14 Centrifugeuse de laboratoire.

1) Calculer la vitesse de S_1 dans son mouvement par rapport à S_0 en O et en A.

2) Calculer la vitesse de S_2 dans son mouvement par rapport à S_0 en A et en G, puis dans son mouvement par rapport à S_1 en A et en G.

2.2 Manège de chevaux de bois

Un manège de chevaux de bois est composé de trois pièces : la plate-forme, le toit et les barres support de chevaux forment la pièce S_1, le corps du cheval est la pièce S_2 et la tête du cheval la pièce S_3. Le sol est noté S_0. Chaque élément S_i du manège est repéré par R_i. Le paramétrage des positions des pièces est donné mais les liaisons ne sont pas représentées sur le schéma.

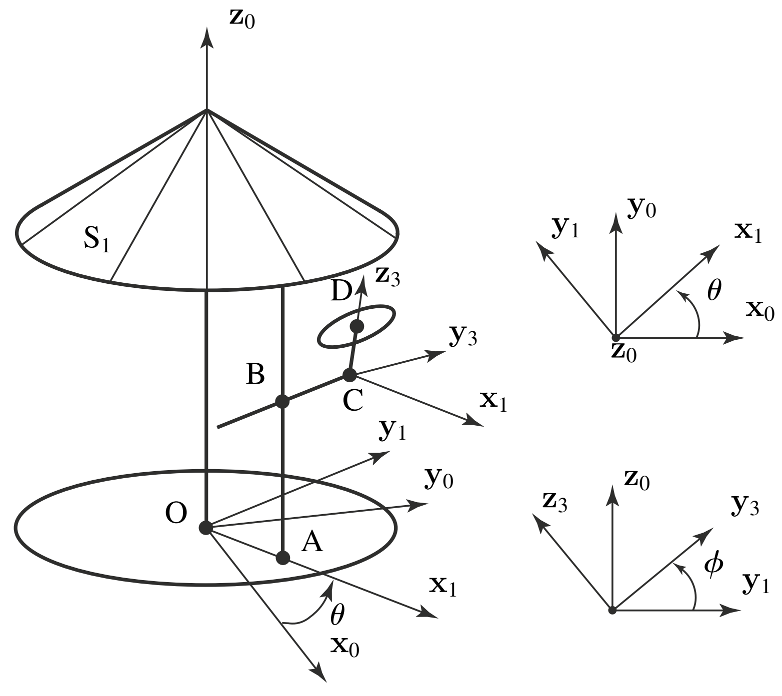


Figure 2.15 Manège de chevaux de bois

- La pièce S_1 tourne par rapport à S_0 autour de l'axe vertical $(O, \mathbf{z}_0)$.
- Le corps S_2 du cheval est en liaison glissière par rapport à la pièce S_1 suivant l'axe $(O, \mathbf{z}_0)$.
- La tête S_3 s'articule avec le corps S_2 grâce à une liaison pivot d'axe $(C, \mathbf{x}_1)$.

On a les notations suivantes : $R_0(0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$, $R_1(A, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0)$, $R_2(B, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0)$ et $R_3(C, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_3)$ et $\mathbf{OA} = r\mathbf{x}_1$, $\mathbf{AB} = h(t)\,\mathbf{z}_0$, $\mathbf{BC} = l\,\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{CD} = d\,\mathbf{z}_3$.

1) Exprimer en fonction du paramétrage proposé le vecteur vitesse du point C, élément de S_2, par rapport au repère R_0.

2) Faites de même pour le vecteur vitesse du point D, élément de S_3, par rapport au repère R_0.

3) Quelles sont les vitesses instantanées de rotation de S_1 par rapport à S_0, de S_2 par rapport à S_0, et de S_3 par rapport à S_0 ?

2.3 Variateur à billes

Afin de transformer une vitesse de rotation on dispose de nombreux systèmes parmi lesquels les dispositifs à engrenages, à courroies. Le système étudié est un réducteur à billes. Il se compose d'un bâti S_0 avec un arbre d'entrée S_3 et un arbre de sortie S_4. Ces deux arbres sont guidés par le bâti et ne peuvent avoir qu'un mouvement de rotation $\mathbf{\Omega}(S_3/S_0)$ et $\mathbf{\Omega}(S_4/S_0)$ par rapport à ce dernier.

Ces arbres viennent par l'intermédiaire de plateaux côniques rigidement fixés sur chacun d'eux rouler sans glisser sur des billes S_2 (une seule est représentée sur le schéma). Le solide S_4 roule sans glisser en P et S_3 en Q sur les billes. On utilisera l'angle que l'on notera α_3, angle $(\mathbf{z}_0, \mathbf{O_2Q})$. Ces billes S_2 sont elles-mêmes contraintes de rouler sans glisser sur le bâti et ceci aux points M et N.

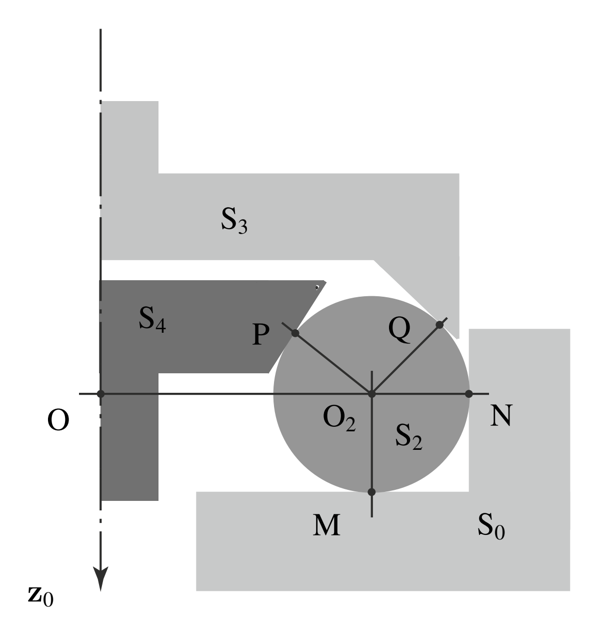


Figure 2.16 **Exemple de réducteur à billes.**

On note r le rayon des billes et R la distance OC avec évidemment $R \geqslant r$. On utilisera le repère $R_0 = (O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ comme repère lié au bâti avec $\mathbf{z}_0$ dans l'axe des arbres et les vecteurs $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ pour compléter le repère. On utilisera le repère $R_3 = (O, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_0)$ comme repère lié à S_3 avec θ_3 comme angle de rotation. On notera $\dot{\theta}_3 = \omega_3$. Le repère $R_4 = (O, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_4, \mathbf{z}_0)$ est lié à S_4 bâti avec θ_4 comme angle de rotation. On notera $\dot{\theta}_4 = \omega_4$. Pour des raisons de commodité de calcul un repère intermédiaire est introduit :
$R_1 = (O_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0)$ repère lié à S_2 avec ψ_1 comme angle de rotation (autour de $\mathbf{z}_0$).

1) Exprimer la condition de roulement sans glissement en M et en N entre S_2 et S_0. En déduire que $\mathbf{\Omega}(S_2/S_0) = \lambda \mathbf{MN}$.

2) Exprimer la condition de roulement sans glissement en P. En déduire une relation entre ω_3 et ω_2.

3) Exprimer la condition de roulement sans glissement en Q. En déduire une relation entre ω_4 et ω_2.

4) Des deux expressions précédentes on a accès au rapport de réduction ω_3/ω_4.

5) Montrer qu'il est toujours positif (interprétez) et inférieur à 1 (tel que calculé) dans le cas particulier $\alpha_3 = \alpha_4$.

6) Exprimer le vecteur rotation de S_2 en fonction de ω_4.

7) Déduiser alors la vitesse du point O_2 par rapport au bâti.

2.4 Base roulante

Une échelle S_1 repose sur le sol sur son extrémité A et s'appuie contre un mur S_0 sur son autre extrémité B. On désigne par $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ le repère lié au sol et au mur et par $R_1(A, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ un repère lié à l'échelle, tel que $\mathbf{AB} = h\mathbf{y}_1$. On note α l'angle entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}_1$.

1) Déterminer le centre instantané de rotation I du mouvement de S_1 par rapport à S_0 de manière analytique puis graphique.

2) Trouver la base et la roulante du mouvement de S_1 par rapport à S_0.

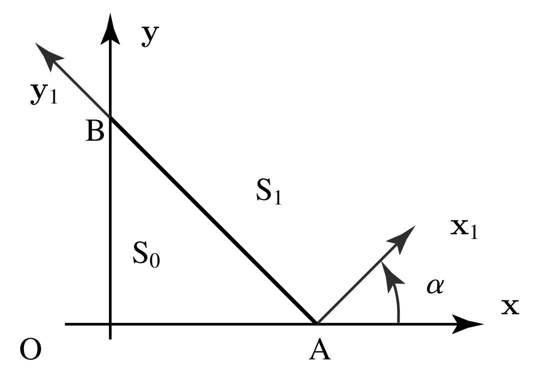


Figure 2.17 **Échelle contre un mur.**

2.5 Douille à aiguilles

Une douille à aiguilles est souvent utilisée, comme les roulements à billes, pour la réalisation du guidage d'un arbre par rapport à un bâti. Elle permet d'obtenir une liaison pivot avec un frottement très faible. Ce composant est constitué d'un ensemble de rouleaux cylindriques (ou aiguilles) maintenus équidistants par une cage de tôle emboutie S_4, et montés dans une bague cylindrique S_2 liée au bâti. Cette bague S_2 constitue le chemin de roulement extérieur des rouleaux, tandis que le chemin de

roulement intérieur est constitué par l'arbre S_1 que l'on cherche à guider en rotation. On étudie le mouvement d'un de ces rouleaux, noté S_3. On suppose que le rouleau S_3 roule sans glisser en K sur la bague S_2 et en L sur l'arbre S_1. On pose : $LK = d$, $OL = r_1$, $OK = r_2$.

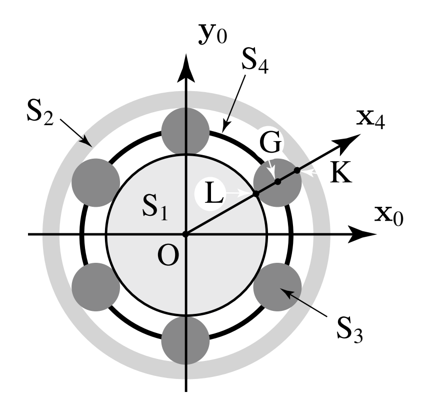


Figure 2.18 **Roulement à aiguilles vu en coupe avec les chemins de roulement interne et externe, les rouleaux et la cage.**

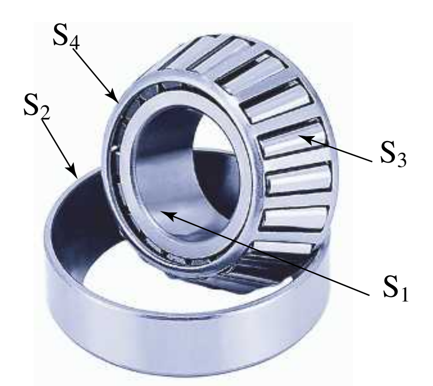


Figure 2.19 **Photo d'un roulement à rouleaux avec les chemins de roulement interne et externe, les rouleaux et la cage.**

1) Donner la position des différents CIR (pour centre instantané de rotation non re-défini dans ce livre) pour les mouvements mutuels des différents plans liés à chaque solide. Préciser la base et la roulante pour les mouvements de S_3 par rapport à S_2 et de S_3 par rapport à S_1.

2) On suppose connu le vecteur vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}(S_1/S_2)(t)$. Déterminer $\mathbf{\Omega}(S_3/S_2)(t)$.

3) De la même manière, déterminer $\mathbf{\Omega}(S_4/S_2)(t)$ en fonction de $\mathbf{\Omega}(S_1/S_2)(t)$.

4) Déterminer la vitesse $\mathbf{V}(G \in S_3/S_2)$ du centre de gravité G du rouleau S_3 dans son mouvement par rapport au bâti S_2.

5) Déterminer l'accélération de G dans son mouvement par rapport au bâti S_2 dans le cas où $\mathbf{\Omega}(S_1/S_2)$ est constant.

2.6 Mécanisme à trois disques

Le système représenté ci-dessous est constitué de trois disques :
S_1 de centre O_1 de rayon R, tourne autour de son axe $(O_1, \mathbf{z}_0)$ avec une vitesse angulaire ω_1.
S_2 de centre O_2 de rayon R, tourne autour de son axe $(O_2, \mathbf{z}_0)$ avec une vitesse angulaire ω_2.
S_3 de centre J de rayon r, d'axe $(J, \mathbf{x})$ est en contact avec S_1 en P_1 et avec S_2 en P_2.

On note O le milieu du segment (O, O_1) tel que $OO_1 = OO_2 = r$.

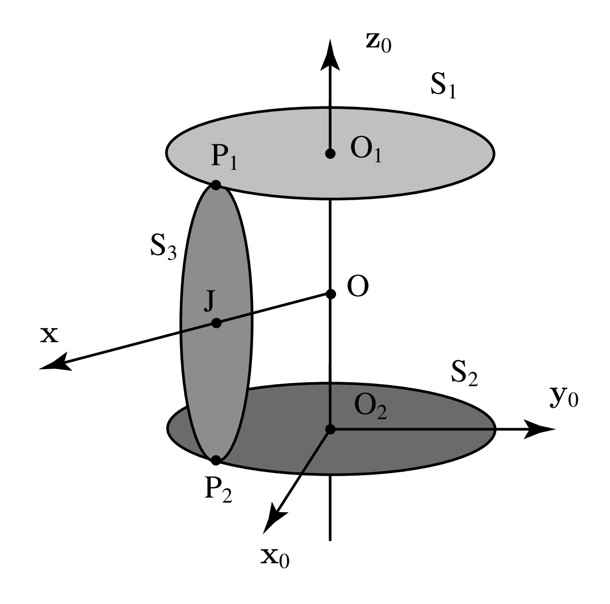


Figure 2.20 **Mécanisme à trois plateaux.**

1) Montrer que la géométrie du dispositif impose que $(J, \mathbf{x})$ passe par O et que $\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{x} = 0$.

2) Soit $\mathbf{\Omega}(S_3/R_0)(t)$ la vitesse instantanée de rotation de S_3 par rapport à R_0. On pose $\mathbf{\Omega}(S_3/R_0)(t) \cdot \mathbf{x} = \omega(t)$ et on note $\psi(t) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ l'angle mesuré autour de $\mathbf{z}_0$. Exprimer $\mathbf{\Omega}(S_3/R_0)(t)$ en fonction de ψ et ω.

3) Donner les éléments de réduction du torseur cinématique au point J du disque S_3 dans son mouvement par rapport à R_0.

4) On suppose que les contacts en P_1 et P_2 sont sans glissement. Former les conditions de non-glissement en P_1 et P_2 et en déduire ω en fonction de ω_1, ω_2, R et r.

5) Quel peut être le rôle d'un tel dispositif ?

2.7 Grue portuaire

La plupart des grues portuaires poursuivent le même but : limiter et éviter le levage des charges. L'objectif, une fois la charge sortie de la cale du navire, est de translater celle-ci, horizontalement, sans levage jusqu'aux quais, ce qui diminue les dépenses énergétiques.

L'étude porte sur le modèle le plus répandu, les grues dites à fléchette. La grue proposée (capacité 50 kN) se compose d'une tourelle S_0 pivotant sur le bâti S_7 mobile en translation sur des rails.

Le mécanisme de la grue se compose d'une flèche S_1 articulée en E sur la tourelle et en B sur la fléchette S_2. La biellette S_3 articulée en D et A sur S_0 et S_2 assure le maintien. La manœuvre de la flèche est assurée par un vérin hydraulique $S_5 + S_6$.

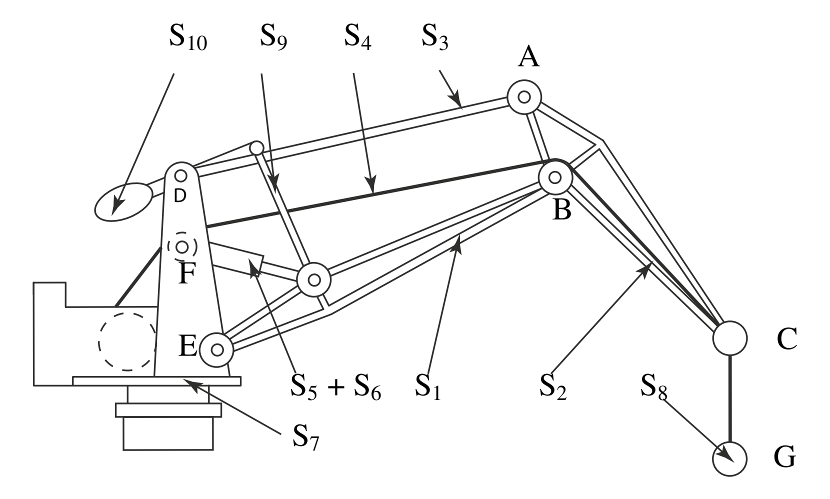


Figure 2.21 Schématisation de la grue.

Un contrepoids S_{10} assure l'équilibrage de l'ensemble en compensant le poids de la flèche. La charge S_8 de centre de gravité G peut monter ou descendre grâce au câble S_4 manœuvré en F par un treuil situé dans la tourelle. Le câble coulisse librement grâce aux poulies placées en B et C.

Les liaisons en A, B, C, D, E et F sont des liaisons pivots de centre de même nom. Le mécanisme de la grue peut être modélisé par les trois solides : flèche S_1, fléchette S_2 et biellette S_3. Ces solides sont contenus dans le plan $(O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ d'un repère orthonormé direct R_0 $(O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ lié à la tourelle S_0 supposée immobile.

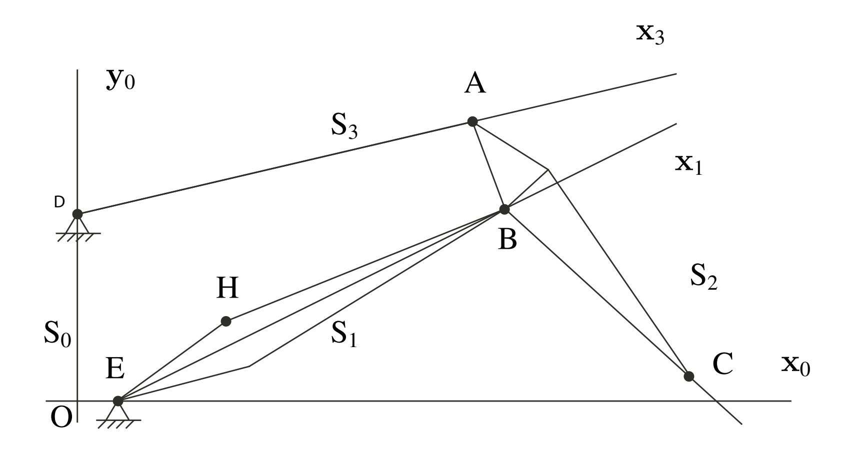


Figure 2.22 Grue étudiée.

- La flèche S_1 est articulée avec S_0 par une liaison pivot d'axe (E, $\mathbf{z}_0$). On définit le repère R_1 (E, $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0$) lié à S_1, tel que $\mathbf{EB} = a\mathbf{x}_1$ et $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) = \theta(t)$ est l'angle mesuré autour de $\mathbf{z}_0$.
- La fléchette S_2 est articulée avec S_1 par une liaison pivot d'axe (B, $\mathbf{z}_0$). On définit le repère R_2 (B, $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_0$) lié à S_2, tel que $\mathbf{BC} = b\mathbf{x}_2$ et $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_2) = \phi(t)$ est l'angle mesuré autour de $\mathbf{z}_0$. A est un point de S_2 tel que AB = c et $(\mathbf{AB}, \mathbf{BC}) = \alpha_0$ est un angle fixe.
- La biellette S_3 est articulée avec S_0 par une liaison pivot d'axe (D, $\mathbf{z}_0$). On définit le repère (A, $\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_0$) lié à S_3, tel que $\mathbf{DA} = d\,\mathbf{x}_3$ et $(\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_3) = (\mathbf{y}_0,\ \mathbf{y}_3) = \psi(t)$ est l'angle mesuré autour de $\mathbf{z}_0$. On rappelle que S_3 est également articulé à S_2 en A par une liaison pivot d'axe (A, $\mathbf{z}_0$).

Cinématique analytique

1) Exprimer les vecteurs vitesses instantanées de rotation $\mathbf{\Omega}(S_i/S_0)$, pour $i = 1$, 2 et 3, de chacun des solides S_i par rapport à R_0.

2) Calculer les vecteurs vitesses $\mathbf{V}(B \in S_1/R_0)$, $\mathbf{V}(A \in S_3/R_0)$ et $\mathbf{V}(C \in S_2/R_0)$.

3) Exprimer le fait que A et B appartiennent au même solide S_2. Que peut-on en déduire ?

4) Calculer le vecteur vitesse $\mathbf{V}(C \in S_1/R_0)$. En déduire $\mathbf{V}(C \in S_2/S_1)$.

Cinématique graphique et CIR Cette partie est à traiter sur le schéma donné.

5) Représenter une autre position du mécanisme.

6) Donner la définition du centre instantané de rotation $I(S_i/S_0)$ du mouvement de S_i par rapport à S_0 et rappeler la propriété géométrique fondamentale de $I(S_i/S_0)$.

7) Déterminer les CIR du mouvement de S_i par rapport à S_0, pour $i = 1$, 2 et 3 et les représenter.

Étude du mouvement de la biellette S_3 par rapport à la tourelle S_0

8) Tracer la trajectoire du point A par rapport à la tourelle.

9) Représenter le support du vecteur vitesse $\mathbf{V}(A \in S_3/S_0)$.

Étude du mouvement de la flèche S_1 par rapport à la tourelle S_0

10) Représenter le support du vecteur vitesse $\mathbf{V}(H \in S_1/S_0)$. On prendra comme échelle des vitesses une longueur de 3 cm pour $\mathbf{V}(H \in S_1/S_0)$ en supposant que $\dot{\theta}$ est négatif.

11) Déterminer graphiquement le vecteur $\mathbf{V}(B \in S_1/S_0)$.

Étude du mouvement de la fléchette S_2

12) Par rapport à la tourelle S_0 : quel est le support de $\mathbf{V}(A \in S_2/S_0)$? de $\mathbf{V}(C \in S_2/S_0)$? Construire les vecteurs $\mathbf{V}(A \in S_2/S_0)$ et $\mathbf{V}(C \in S_2/S_0)$.

13) Par rapport à la flèche S_1 : construire le vecteur $\mathbf{V}(C \in S_2/S_1)$. Vérifier qu'il est porté par $\mathbf{y}_2$.

2.8 Roulement à contacts obliques

Présentation du problème : le but de l'étude est de déterminer la géométrie et la cinématique d'un roulement à rouleaux coniques. Ce type de roulement est courant dans tous les mécanismes dans lesquels il y a des pièces qui tournent. On impose un mouvement d'entrée (rotation de 1 par rapport à O) et on va calculer les différentes vitesses et vecteur rotation des pièces en mouvement. Le roulement est constitué :

- d'une bague interne conique 1, en liaison pivot d'axe (O, $\mathbf{x}_0$) par rapport au bâti (0). Liaison pivot signifie que le solide 1 peut librement tourner autour de l'axe de rotation indiqué ;
- d'une bague externe conique liée par encastrement au bâti (0). Elle est donc considérée comme fixée au bâti ;
- d'un ensemble de rouleaux coniques en liaison linéïque rectiligne avec d'une part la bague externe liée à (0) et d'autre part la bague interne (1). Tout cela signifie qu'il y a contact entre ces rouleaux coniques et les bagues selon des lignes droites ;
- d'une cage (3) positionnant les rouleaux les uns par rapport aux autres. La cage 3 a un mouvement de rotation autour de l'axe $\mathbf{x}_0$ et les rouleaux tournent autour d'un axe (fixé sur la cage) autour de l'axe $\mathbf{x}_2$.On peut regarder les photos de roulement à rouleaux ou à billes pour comprendre la composition d'un roulement. Information : il suffit de considérer une simple roue de chariot pour avoir l'illustration de l'intérêt de ces roulements.



Figure 2.23 **Photo d'un roulement à rouleaux.**

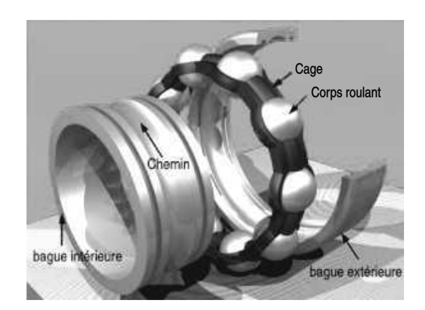


Figure 2.24 **Vue éclatée d'un roulement à billes.**

Données du problème Le vecteur $\mathbf{x}_i$ oriente la génératrice de contact entre le rouleau représenté et le cône interne (1). Le vecteur $\mathbf{x}_j$ oriente la génératrice de contact entre le rouleau représenté et le cône externe lié à (0). On pose : $\mathbf{A'A} = R\mathbf{y}$,

$\mathbf{IA} = \mathbf{AJ} = r\mathbf{y}_2$, $\mathbf{OA} = \alpha\mathbf{x}_2$. On suppose qu'il y a roulement sans glissement en I et J ; points milieux des segments de contact.

1) Donner la forme des torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}(1/0)\}_M$, $\{\mathcal{V}(3/0)\}_M$ et $\{\mathcal{V}(2/3)\}_M$. Vous devez proposer un point M qui simplifie au maximum chaque torseur cinématique.
2) Déterminer les axes centraux des torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ et $\{\mathcal{V}(2/1)\}$ en exploitant les conditions de roulement sans glissement en J et I.
3) Déterminer la condition géométrique telle que les vitesses de glissement du rouleau par rapport aux cônes de roulement soient nulles pour tout point des génératrices de contact. Déterminer alors l'angle β.
4) Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}_O$ en fonction des données géométriques et de $\mathbf{\Omega}(1/0)$.
5) Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/0)\}_A$ en fonction des données géométriques et de $\mathbf{\Omega}(1/0)$.

Solutions des exercices

2.1 Centrifugeuse

1) On a $\mathbf{V}(O \in S_1/S_0) = \mathbf{0}$ car c'est un point fixe dans le repère R_0. La relation de champ des vitesse donne $\mathbf{V}(A \in S_1/S_0) = \mathbf{V}(O \in S_1/S_0) + \mathbf{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \mathbf{OA} = a\dot{\alpha}\,\mathbf{z}_1$.
2) On a $\mathbf{V}(A \in S_2/S_0) = \mathbf{V}(A \in S_1/S_0)$ car le point A est sur l'axe de la liaison pivot entre ces deux solides. $\mathbf{V}(G \in S_2/S_0) = \mathbf{V}(A \in S_2/S_0) + \mathbf{\Omega}(S_2/S_0) \wedge \mathbf{AG} = a\dot{\alpha}\,\mathbf{z}_1 + (\mathbf{\Omega}(S_2/S_1) + \mathbf{\Omega}(S_1/S_0)) \wedge \mathbf{AG} = b\dot{\beta}\,\mathbf{y}_2 + \dot{\alpha}(a + b\sin\beta)\,\mathbf{z}_1$. $\mathbf{V}(G \in S_2/S_1) = \mathbf{V}(A \in S_2/S_1) + \mathbf{\Omega}(S_2/S_1) \wedge \mathbf{AG} = b\dot{\beta}\,\mathbf{z}_1$.

2.2 Manège

Nous conseillons de faire un schéma du dispositif avec les liaisons (en utilisant les éléments donnés dans le chapitre sur les liaisons et leur modélisation).

1) $\mathbf{V}(C \in S_2/R_0) = \left.\dfrac{d\mathbf{OC}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d(\mathbf{OA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BC})}{dt}\right|_{R_0}$. Nous allons calculer chaque terme.

   $\left.\dfrac{d\mathbf{OA}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d(r\,\mathbf{x}_1)}{dt}\right|_{R_0} = r\dot{\theta}\mathbf{y}_1$ (la dérivée du vecteur $\mathbf{x}_1$ est portée par le vecteur directement perpendiculaire soit $\mathbf{y}_1$).

   $\left.\dfrac{d\mathbf{AB}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d(h(t)\,\mathbf{z}_0)}{dt}\right|_{R_0} = \dot{h}(t)\mathbf{z}_0$ (la dérivée du vecteur $\mathbf{z}_0$ dans R_0 est nulle).

$\left.\frac{d\mathbf{BC}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d(l\,\mathbf{y}_1)}{dt}\right|_{R_0} = l\dot{\theta}\,(-)\mathbf{x}_2$ (la dérivée du vecteur $\mathbf{y}_1$ est portée par le vecteur directement perpendiculaire soit $-\mathbf{x}_1$).

On a au final :

$$\mathbf{V}(C \in S_2/R_0) = \dot{\theta}(r\,\mathbf{y}_1 - l\,\mathbf{x}_1) + \dot{h}\,\mathbf{z}_0.$$

2) $\mathbf{V}(D \in S_3/R_0) = \left.\frac{d\mathbf{OD}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d(\mathbf{OC}+\mathbf{CD})}{dt}\right|_{R_0}.$

$\left.\frac{d\mathbf{OC}}{dt}\right|_{R_0} = \mathbf{V}(C \in S_2/R_0)$ car le point C est sur l'axe de la liaison.

$\left.\frac{d\mathbf{CD}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d(d\,\mathbf{z}_3)}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d(d\,\mathbf{z}_3)}{dt}\right|_{R_3} + \mathbf{\Omega}(R_3/R_0) \wedge \mathbf{z}_3 = (\mathbf{\Omega}(R_3/R_2) + \mathbf{\Omega}(R_2/R_1) + \mathbf{\Omega}(R_1/R_0)) \wedge \mathbf{z}_3 = (\dot{\phi}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{0} + \dot{\theta}\,\mathbf{z}_1) \wedge \mathbf{z}_3 = -d\dot{\phi}\,\mathbf{y}_3 + d\dot{\theta}\,\mathbf{x}_1.$

On a au final

$$\mathbf{V}(D \in S_2/R_0) = \dot{\theta}(d\sin\phi - l)\,\mathbf{x}_1 + \dot{\theta}r\,\mathbf{y}_1 + h\dot{\phi}\,\mathbf{y}_3 + \dot{h}\mathbf{z}_0.$$

Cette expression vectorielle montre à nouveau qu'il ne serait pas astucieux d'aller « chercher » le repère R_0.

3) Les réponses sont déjà données dans le calcul précédent.

2.3 Échelle

1) Recherche du CIR du mouvement de S_1 par rapport S_0. On a $\mathbf{OA} = h\sin\alpha\,\mathbf{x}$ et $\mathbf{OB} = h\cos\alpha\,\mathbf{y}$. On en déduit que :

$$\mathbf{V}(A \in S_1/S_0) = h\dot{\alpha}\cos\alpha\,\mathbf{x},$$

$$\mathbf{V}(B \in S_1/S_0) = -h\dot{\alpha}\sin\alpha\,\mathbf{x}.$$

De façon graphique on sait que les points A et B se déplacent le long du sol et du mur donc les vecteurs vitesse sont tangents à ces éléments (sol et mur). Le CIR I est tel que $\mathbf{V}(I \in S_1/S_0) = \mathbf{0}$. Le point I est donc sur la perpendiculaire à $\mathbf{V}(A \in S_1/S_0)$ menée du point A. On procède ainsi pour B et on localise le point I.

Analytiquement on a : $\mathbf{V}(A \in S_1/S_0) = \mathbf{V}(I \in S_1/S_0) + \mathbf{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \mathbf{IA} = -\dot{\alpha}\mathbf{z} \wedge (\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = -\dot{\alpha}\lambda\mathbf{y} + \dot{\alpha}\mu\mathbf{x}.$

Par identification avec le terme trouvé plus haut on trouve que $\mu = h\cos\alpha$ et $\lambda = 0$ ce qui donne donc $\mathbf{AI} = h\cos\alpha\,\mathbf{y}$. On retrouve bien le résultat de la méthode graphique.

2) Base et roulante. La **roulante** est la trajectoire du point $I(t)$ dans le repère associé à S_1. On a $\mathbf{AI} = h\cos\alpha\mathbf{y} = h\cos\alpha(\sin\alpha\mathbf{x}_1 + \cos\alpha\mathbf{y}_1)$. On passe en angle moitié

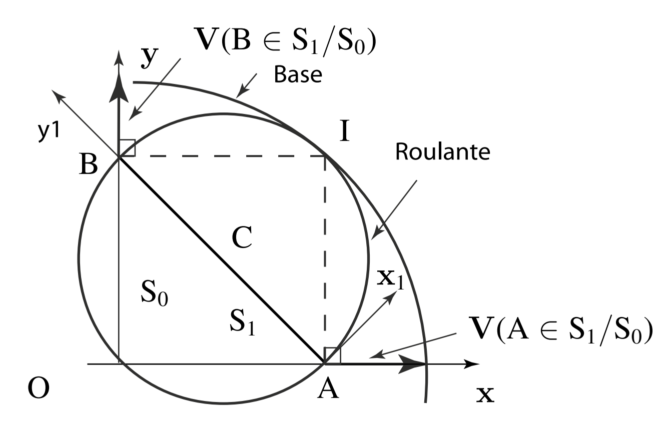


Figure 2.25 Échelle contre un mur.

(relations trigonométriques à savoir) et on trouve :

$$\mathbf{AI} = \frac{h \sin 2\alpha}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{h \cos 2\alpha}{2}\mathbf{y}_1 = x_1\mathbf{x}_1 + y_I\mathbf{y}_1.$$

On en déduit la relation

$$x_I^2 + (y_I - \frac{h}{2})^2 = \frac{h^2}{4}\sin^2 2\alpha + \frac{h^2}{4}\cos^2 2\alpha = \frac{h^2}{4}.$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre $(0,\ h/2)$ dans R_1 et de diamètre la tige AB. Le point C centre du cercle est donc au milieu de la tige.

La **base** est la trajectoire du point $I(t)$ dans le repère associé à S_0. On a $\mathbf{OI} = \mathbf{OA} + \mathbf{AI} = h\sin\alpha\mathbf{x} + h\cos\alpha\mathbf{y}) = x_I\mathbf{x} + y_I\mathbf{y}$. On en déduit la relation $x_I^2 + y_I^2 = h^2$ qui est l'équation d'un cercle de centre $(0,\ 0)$ dans R_0 (donc le point O) et de rayon AB.

2.4 Douilles à aiguilles

1) Position des différents CIR et base roulante.

Pour identifier les CIR on cherche les points de vitesse nulle dans le mouvement relatif. On a I_{32} (CIR du mouvement de S_3 par rapport à S_2) = K car on a non glissement de S_3 sur S_2 en K ce qui correspond à $\mathbf{V}(K \in 3/2) = \mathbf{0}$. De même on a $I_{31} = L$ car on a non glissement de S_3 sur S_1 en L ce qui correspond à $\mathbf{V}(L \in 3/1) = \mathbf{0}$. I_{12} = O car $\mathbf{V}(O \in 2/1) = \mathbf{0}$ car $O \in S_1$ et $\in S_2$. De la même façon $I_{42} = I_{41}$= O car $O \in S_1$, $\in S_2$ et $\in S_4$ et I_{43} = G car $G \in S_4$ et $\in S_3$.

2) Soit $\mathbf{V}(L \in 1/2) = \mathbf{V}(O \in 1/2) + \mathbf{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \mathbf{OL}$. Mais on a $\mathbf{V}(O \in 1/2) = \mathbf{0}$ car O appartient au bâti, donc $\mathbf{V}(L \in 1/2) = \omega_{12}\mathbf{z}_0 \wedge r_1\mathbf{x}_4$.

Soit $\mathbf{V}(L \in 3/2) = \mathbf{V}(K \in 3/2) + \Omega(3/2) \wedge \mathbf{KL}$. Mais on a $\mathbf{V}(K \in 3/2) = \mathbf{0}$ car il y a non glissement en K, donc $\mathbf{V}(L \in 3/2) = \omega_{32}\mathbf{z}_0 \wedge (-)d\mathbf{x}_4$.

On a non glissement en L de S_3 sur S_1 donc $\mathbf{V}(L \in 3/1) = \mathbf{0}$ ce qui peut se ré-écrire par la composition des mouvements $\mathbf{V}(L \in 1/2) = \mathbf{V}(L \in 3/2)$ soit

$r_1\omega_{12} = -d\omega_{32}$. On en déduit au final

$$\omega_{32} = -\frac{r_1}{d}\omega_{12}.$$

3) On va calculer la vitesse de G de deux façons différentes.
D'une part on a $\mathbf{V}(\mathrm{G} \in 4/2) = \mathbf{V}(\mathrm{O} \in 4/2) + \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}_4/\mathrm{S}_2) \cdot \mathbf{OG}$ par le champ des vitesses. Mais $\mathbf{V}(\mathrm{O} \in 4/2) = \mathbf{0}$ donc $\mathbf{V}(\mathrm{G} \in 4/2) = \omega_{42}\mathbf{z}_0 \wedge (r_1 + d/2)\mathbf{x}_4$
D'autre part on a aussi $\mathbf{V}(\mathrm{G} \in 3/2) = \mathbf{V}(\mathrm{K} \in 3/2) + \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}_3/\mathrm{S}_2) \wedge \mathbf{KG}$ par le champ des vitesses. Mais $\mathbf{V}(\mathrm{G} \in 3/2) = \mathbf{0}$ (non glissement) donc $\mathbf{V}(\mathrm{G} \in 3/2) = \omega_{32}\mathbf{z}_0 \wedge (-)d/2\mathbf{x}_4$.
Mais on sait que $\mathbf{V}(\mathrm{G} \in 3/4) = \mathbf{0}$ car $\mathrm{G} \in \mathrm{S}_4$ et $\mathrm{G} \in \mathrm{S}_3$ ce qui peut se ré-écrire par composition des mouvements $\mathbf{V}(\mathrm{G} \in 4/2) = \mathbf{V}(\mathrm{G} \in 3/2)$ soit $(r_1 + d/2)\omega_{42} = d/2\omega_{32}$. On en déduit au final

$$\omega_{42} = \frac{r_1}{2r_1 + d}\omega_{12}.$$

4) $\mathbf{V}(\mathrm{G} \in 3/2) = \mathbf{V}(\mathrm{K} \in 3/2) + \mathbf{\Omega}(3/2) \wedge \mathbf{KG}$. Or $\mathbf{V}(\mathrm{K} \in 3/2) = \mathbf{0}$. Donc $\mathbf{V}(\mathrm{G} \in 3/2) = \omega_{30}\mathbf{z}_0 \wedge (-)d/2\mathbf{x}_4 = r_1/2\omega_{12}\mathbf{y}_4$.
5) Par dérivation du vecteur position on obtient

$$\mathbf{\Gamma}(\mathrm{G} \in \mathrm{S}_3/\mathrm{S}_2) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(\mathrm{G} \in \mathrm{S}_3/\mathrm{S}_2)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_2} = \frac{r_1\omega_{12}}{2}\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_4}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_3/\mathrm{R}_2}.$$

car ω_{12} est constant. On a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_4}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_3/\mathrm{R}_2} = \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}_3/\mathrm{S}_2) \wedge \mathbf{y}_4 = \frac{r_1}{d}\omega_{12}\,\mathbf{x}_4.$$

Dans cette expression on dérive le vecteur $\mathbf{y}_4$ en considérant son mouvement par rapport à S_2 lorsqu'il est attaché à S_3 Finalement on obtient :

$$\mathbf{\Gamma}(\mathrm{G} \in \mathrm{S}_3/\mathrm{S}_2) = \frac{r_1^2}{2d}\omega_{12}^2\,\mathbf{x}_4.$$

2.5 Réducteur à plateaux

1) On sait que S_1 et S_2 ont même rayon donc $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ est colinéaire à $\mathbf{z}_0$. On a $\mathbf{x} \perp$ disque S_3 et P_1 et $\mathrm{P}_2 \in \mathrm{S}_3$ donc $\mathbf{x} \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = 0$ soit $\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{x} = 0$.
Le point J est au milieu de $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ et O au milieu de $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$; comme $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ colinéaire à $\mathbf{z}_0$ et $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ colinéaire à $\mathbf{z}_0$ on a $\mathbf{JO} \cdot \mathbf{z}_0 = 0$.
De même la droite (J, $\mathbf{x}$) passe par J et est perpendiculaire à $\mathbf{z}_0$ donc la doire (J, $\mathbf{x}$) passe par O.

2) On note $R_0 = (O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ le repère orthonormé direct. On déduit $R = (O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}_0)$ de R_0 par rotation $\psi(t)$ autour de $(O, \mathbf{z}_0)$ et R_{S_3} (lié à S_3) $(J, \mathbf{y}_{S_3}, \mathbf{z}_{S_3}, \mathbf{x})$ se déduit de R par une rotation $\theta(t)$ autour de l'axe $(J, \mathbf{x})$ avec $\dot{\theta} = \omega$.
   Par composition des mouvements on a $\mathbf{\Omega}(S_3/R_0) = \omega\mathbf{x} + \dot{\psi}\mathbf{z}_0$.
3) Le torseur cinématique au point J du disque S_3 dans son mouvement par rapport à R_0 est :
$$\{ \mathcal{V}(S_3/R_0) \} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{\Omega}(S_3/R_0) \\ \\ \mathbf{V}(J \in S_3/R_0) \end{array} \right\}.$$
   avec $\mathbf{\Omega}(S_3/R_0) = \omega\mathbf{x} + \dot{\psi}\mathbf{z}_0$ et $\mathbf{V}(J \in S_3/R_0) = R \left.\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}\right|_{R_0}$.
4) Condition de roulement sans glissement entre les disques S_1 et S_3 en P_1 : $\mathbf{V}(P_1 \in S_1/R_0) = \mathbf{V}(P_1 \in S_3/R_0)$. On va utiliser la relation de moment : S_1 : $\mathbf{V}(P_1 \in S_1/R_0) = \mathbf{V}(O_1 \in S_1/R_0) + \mathbf{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \mathbf{O_1P_1} = R\omega_1\mathbf{y}$. S_3 : $\mathbf{V}(P_1 \in S_3/R_0) = \mathbf{V}(J \in S_3/R_0) + \mathbf{\Omega}(S_3/R_0) \wedge \mathbf{JP_1} = R\dot{\psi}\mathbf{y} - r\omega_1\mathbf{y}$.
   La condition de roulement sans glissement s'écrit donc
$$R\dot{\psi}\mathbf{y} - \omega r\mathbf{y}_1 = R\omega_1\mathbf{y}.$$
   La condition de non glissement entre S_2 et S_3 en P_2 impose :
$$\mathbf{V}(P_2 \in S_2/R_0) = \mathbf{V}(P_2 \in S_3/R_0).$$
   On va utiliser la relation de moment :
$$S_2 : \mathbf{V}(P_2 \in S_2/R_0) = \mathbf{V}(O_2 \in S_2/R_0) + \mathbf{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \mathbf{O_2P_2} = R\omega_2\mathbf{y}.$$
$$S_3 : \mathbf{V}(P_2 \in S_3/R_0) = \mathbf{V}(J \in S_3/R_0) + \mathbf{\Omega}(S_3/R_0) \wedge \mathbf{JP_2} = R\dot{\psi}\mathbf{y} + r\omega_1\mathbf{y}.$$
   La condition de roulement sans glissement s'écrit donc
$$R\dot{\psi}\mathbf{y} + \omega r\mathbf{y} = R\omega_2\mathbf{y}.$$
   Les deux conditions permettent d'écritre *in fine*
$$w = \frac{R}{2r}(\omega_2 - \omega_1).$$
5) Si on imagine que la vitesse d'entrée est donnée par le solide S_3 on constate qu'on impose des vitesses différentes des disques S_1 et S_2 ce qui correspond à une fonction de type différentiel dans un véhicule (les roues d'une voiture dans un virage ne tournent pas à la même vitesse, la roue extérieure doit tourner plus vite que la roue intérieure).

2.6 Variateur à billes

1) Distribution des vitesses dans le solide 2 entre A et B :

$$\mathbf{V}(\mathrm{B} \in 2/1) = \mathbf{V}(\mathrm{A} \in 2/1) + \mathbf{\Omega}(2/1) \wedge \mathbf{AB}.$$

Comme il y a roulement sans glissement en A et en B alors :

$$\mathbf{\Omega}(2/1) \wedge \mathbf{AB} = \mathbf{0}.$$

Donc l'axe de rotation de 2 par rapport à 1 est la droite AB et le vecteur rotation $\mathbf{\Omega}(2/1)$ est colinéaire à $\mathbf{AB}$. On pose $\mathbf{\Omega}(2/1) = \lambda \mathbf{AB}$.
Calcul de $\mathbf{\Omega}(2/1)$: on a roulement sans glissement en D donc : $\mathbf{V}(\mathrm{D} \in 2/3) = \mathbf{0}$.
Donc : $\mathbf{V}(\mathrm{D} \in 3/1) = \mathbf{V}(\mathrm{D} \in 3/2) + \mathbf{V}(\mathrm{D} \in 2/1) = \mathbf{V}(\mathrm{D} \in 2/1)$. On a aussi : $\mathbf{V}(\mathrm{D} \in 2/1) = \mathbf{V}(\mathrm{B} \in 2/1) + \mathbf{\Omega}(2/1) \wedge \mathbf{BD} = \mathbf{\Omega}(2/1) \wedge \mathbf{BD}$. et $\mathbf{V}(\mathrm{D} \in 3/1) = \mathbf{V}(\mathrm{O'} \in 3/1) + \mathbf{\Omega}(3/1) \wedge \mathbf{O'D} = \mathbf{\Omega}(3/1) \wedge \mathbf{O'D}$.
On peut donc conclure de ces deux dernières égalités que :

$$\mathbf{\Omega}(3/1) \wedge \mathbf{O'D} = \mathbf{\Omega}(2/1) \wedge \mathbf{BD}.$$

On écrit $\mathbf{\Omega}(2/1) \wedge (-r\mathbf{x}_1 + r\mathbf{y}) = \omega_{3/1}\mathbf{y} \wedge (R - r)\mathbf{x}_1$ ce qui permet de calculer le vecteur : $\mathbf{\Omega}(2/1) = \Lambda \mathbf{AB} = \lambda(r + r\cos\alpha)\mathbf{x}_1 + r\sin\alpha\mathbf{y}$.

$$\lambda = -\omega_{3/1}\frac{R - r}{r^2(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)}.$$

2) Vitesse de C. On a roulement sans glissement de S_2 par rapport à S_4 qui est lié à S_1 soit : $\mathbf{V}(\mathrm{C} \in 2/1) = \mathbf{V}(\mathrm{B} \in 2/1) + \mathbf{\Omega}(2/1) \wedge \mathbf{BC}$.
Mais la vitesse de B est connue donc :

$$\mathbf{V}(\mathrm{C} \in 2/1) = -\omega_{3/1}\frac{(R - r)\sin\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}\mathbf{z}_1.$$

3) Vitesse de T. Ce point sur l'axe de rotation de 2 par rapport à S_1 cette vitesse (et l'accélération) est nulle. Comme on vient de calculer les vitesses de points appartenant aux différents solides ainsi les vecteurs rotation, on connaît tout le mouvement. On peut alors calculer la vitesse de glissement au point E.

2.7 Grue Cinématique analytique

1) $\mathbf{\Omega}(S_1/S_0) = \dot\theta\,\mathbf{z}_0$, $\mathbf{\Omega}(S_2/S_0) = \dot\phi\,\mathbf{z}_0$, $\mathbf{\Omega}(S_3/S_0) = \dot\psi\,\mathbf{z}_0$.

2) $\mathbf{V}(\mathrm{B} \in S_1/R_0) = \mathbf{V}(\mathrm{E} \in S_1/R_0) + \mathbf{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \mathbf{EB} = \mathbf{0} + \dot\theta\,\mathbf{z}_0 \wedge a\,\mathbf{x}_1 = a\dot\theta\,\mathbf{y}_1$.
$\mathbf{V}(\mathrm{A} \in S_3/R_0) = \mathbf{V}(\mathrm{D} \in S_3/R_0) + \mathbf{\Omega}(S_3/S_0) \wedge \mathbf{DA} = \mathbf{0} + \dot\psi\,\mathbf{z}_0 \wedge d\,\mathbf{x}_3 = d\dot\psi\,\mathbf{y}_3$.
$\mathbf{V}(\mathrm{C} \in S_2/R_0) = \mathbf{V}(\mathrm{B} \in S_2/R_0) + \mathbf{\Omega}(S_2/S_0) \wedge \mathbf{BC} = \mathbf{V}(\mathrm{B} \in S_1/R_0) + \mathbf{\Omega}(S_2/S_0) \wedge \mathbf{BC} = a\dot\theta\,\mathbf{y}_1 + b\dot\phi\,\mathbf{y}_2$.

3) $\mathbf{V}(\mathrm{B} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) = \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) + \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}_2/\mathrm{S}_0) \wedge \mathbf{AB} = \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}_3/\mathrm{R}_0) + \dot{\psi}\, \mathbf{z}_0 \wedge d\, \mathbf{x}_3$. Mais $\mathbf{V}(\mathrm{B} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) = \mathbf{V}(\mathrm{B} \in \mathrm{S}_1/\mathrm{R}_0)$. Donc on en déduit :

$$a\dot{\theta}\mathbf{y}_1 = d\dot{\psi}\mathbf{y}_3 + c\dot{\phi}(\cos\alpha_0\, \mathbf{y}_2 - \sin\alpha_0\, \mathbf{x}_2).$$

Cette égalité vectorielle peut-être projetée sur $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$ ce qui donne après calculs (et utilisation des formules de trigonométrie)

$$-a\dot{\theta}\sin\theta + d\dot{\psi}\sin\psi = -c\dot{\phi}\sin(\phi + \alpha_0).$$

$$a\dot{\theta}\cos\theta - d\dot{\psi}\cos\psi = c\dot{\phi}\cos(\phi + \alpha_0).$$

4) $\mathbf{V}(\mathrm{C} \in \mathrm{S}_1/\mathrm{R}_0) = \mathbf{V}(\mathrm{B} \in \mathrm{S}_1/\mathrm{R}_0) + \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}_1\mathrm{S}_0) \wedge \mathbf{BB} = a\dot{\theta}\, \mathbf{y}_1 + b\dot{\theta}\, \mathbf{y}_2$. On en déduit par composition des vitesses $\mathbf{V}(\mathrm{C} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_1) = \mathbf{V}(\mathrm{C} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) - \mathbf{V}(\mathrm{C} \in \mathrm{S}_1/\mathrm{R}_0) = b(\dot{\phi} - \dot{\theta})\, \mathbf{y}_2$. On constate que $\mathbf{V}(\mathrm{C} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{S}_1)$ est perpendiculaire à $\mathbf{BC}$ ce qui est logique car B est le CIR I_{21} ($\mathbf{V}(\mathrm{C} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{S}_1) = \mathbf{0}$ car B appartient à la fois à S_2 et à S_1).

2.8 Roulement à contacts obliques

1) Donnez la forme des torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}(1/0)\}_{\mathrm{M}}$, $\{\mathcal{V}(3/0)\}_{\mathrm{M}}$ et $\{\mathcal{V}(2/3)\}_{\mathrm{M}}$. Vous devez proposer un point M qui simplifie au maximum chaque torseur cinématique. Comme 1 est en rotation autour de $\mathbf{x}_0$ on a :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{\ \mathcal{V}(\mathbf{\Omega}_{10}/\mathbf{V}(\mathrm{O} \in 1/0))\ \right\}_{\mathrm{O}}.$$

avec $\mathbf{V}(\mathrm{O} \in 1/0) = \mathbf{0}$.
Comme 3 est aussi en rotation autour de $\mathbf{x}_0$ on a :

$$\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{\ \mathcal{V}(\mathbf{\Omega}_{30}/\mathbf{V}(\mathrm{O} \in 3/0))\ \right\}_{\mathrm{O}}.$$

Si on imagine que le point O appartient aussi au solide 3 il est sur l'axe de rotation donc sa vitesse est nulle.
Les rouleaux coniques sont entraînés par la cage 3 mais peuvent librement tourner autour de $\mathbf{x}_2$.

$$\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{\ \mathcal{V}(\mathbf{\Omega}_{32}/\mathbf{V}(\mathrm{O} \in 3/2))\ \right\}_{\mathrm{O}}.$$

On a aussi $\mathbf{V}(\mathrm{O} \in 3/2) = \mathbf{0}$.

2) Déterminer les axes centraux des torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ et $\{\mathcal{V}(2/1)\}$ en exploitant les conditions de roulement sans glissement en J et I. La définition d'un axe central Δ est :

$$\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}(\mathrm{A}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathrm{A} \in \Delta.$$

Ici on a roulement sans glissement dans le mouvement de 2/0 en tout point J du contact (axe $(\mathrm{J}, \mathbf{x}_\mathrm{j})$). Donc

$$\mathbf{V}(\mathrm{M} \in 2/0) \wedge \mathbf{\Omega}_{20} = \mathbf{0},$$

pour tout point M de la ligne de contact. Donc $(\mathrm{J}, \mathbf{x}_\mathrm{j})$ est l'axe central Δ_{20}. De la même manière $(\mathrm{I}, \mathbf{x}_\mathrm{i})$ est l'axe central Δ_{21}.

3) Déterminer la condition géométrique telle que les vitesses de glissement du rouleau par rapport aux cônes de roulement soient nulles pour tout point des génératrices de contact. Déterminer alors l'angle β. Nous allons supposer que Δ_{20} intercepte $(\mathrm{O}, \mathbf{x}_0)$ en J' et que Δ_{21} intercepte $(\mathrm{O}, \mathbf{x}_0)$ en I'. On peut écrire par composition des mouvements :

$$\mathbf{V}(\mathrm{J}' \in 2/0) = \mathbf{V}(\mathrm{J}' \in 2/1) + \mathbf{V}(\mathrm{J}' \in 1/0).$$

Or $\mathbf{V}(\mathrm{J}' \in 2/0) = \mathbf{0}$ car roulement sans glissement et $\mathbf{V}(\mathrm{J}' \in 1/0) = \mathbf{0}$ car J' est sur l'axe de rotation.
Donc $\mathbf{V}(\mathrm{J}' \in 2/1) = \mathbf{0}$ ce qui indique que Δ_{21} passe par J'. On en déduit par le même raisonnement que Δ_{20} passe par I'.
On vient de montrer que Δ_{21} qui passe par I' (hypothèse) passe aussi par J' (résultat du calcul) et que Δ_{20} qui passe par J' (hypothèse) passe aussi par I' (résultat du calcul). Ces points sont donc confondus et sur l'axe de rotation $(\mathrm{O}, \mathbf{x}_0)$. Les rouleaux sont donc coniques de même sommet. On trouve facilement que

$$\tan\beta = \frac{r\mathrm{AA'}}{\alpha d}.$$

4) Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/0)\}_{\mathrm{O}}$ en fonction des données géométriques et de $\mathbf{\Omega}(1/0)$. On exploite les conditions roulement sans glissement en I.

$$\mathbf{V}(\mathrm{I} \in 1/2) = \mathbf{V}(\mathrm{I} \in 1/0) + \mathbf{V}(\mathrm{I} \in 0/2) = \mathbf{0}.$$

Ce qui donne grâce au champ des vitesses

$$\mathbf{V}(\mathrm{O} \in 1/0) + \mathbf{IO} \wedge \Omega_{10} = \mathbf{V}(\mathrm{J} \in 2/0) + \mathbf{IJ} \wedge \mathbf{\Omega}_{20}.$$

Mais on a $\mathbf{V}(\mathrm{O} \in 1/0) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{V}(\mathrm{J} \in 2/0) = \mathbf{0}$. On en déduit

$$\mathbf{\Omega}(2/0) = \Omega(1/0)\frac{r\cos\gamma - a\sin\gamma}{2r\cos\beta}\mathbf{x}_j.$$

5) Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(3/0)\}_{\mathrm{A}}$ en fonction des données géométriques et de $\mathbf{\Omega}(1/0)$. On remarque que $\mathbf{V}(\mathrm{A} \in 2/0) = \mathbf{V}(\mathrm{A} \in 3/0)$ car A est sur l'axe de rotation de 3/2. Donc

$$\mathbf{V}(\mathrm{O} \in 2/0) + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{\Omega}_{32} = \mathbf{V}(\mathrm{A}' \in 3/0) + \mathbf{A'A} \wedge \mathbf{\Omega}_{30}.$$

avec $\mathbf{V}(\mathrm{O} \in 2/0) = \mathbf{0}$ (point sur l'axe de rotation) et $\mathbf{V}(\mathrm{A}' \in 3/0) = \mathbf{0}$ (point sur l'axe de rotation). On trouve ainsi

$$\mathbf{\Omega}(3/0) = -\Omega(1/0)\frac{r\cos\gamma - a\sin\gamma}{2R}\mathbf{x}_0.$$

et en exploitant la relation : $\mathbf{V}(\mathrm{A} \in 3/0) = \mathbf{AO} \wedge \mathbf{\Omega}_{20}$ on aboutit à :

$$\mathbf{V}(\mathrm{A} \in 3/0) = -\Omega(1/0)(r\cos\gamma - a\sin\gamma)/2\mathbf{z}.$$

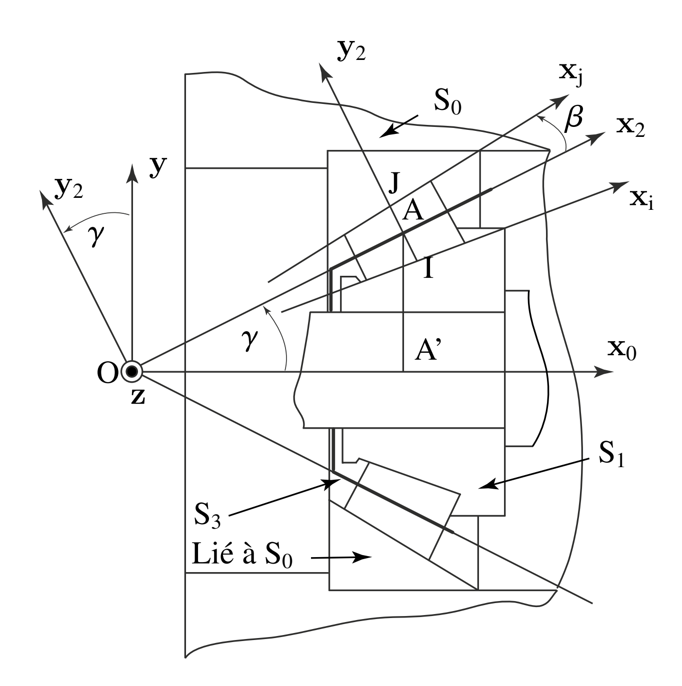


Figure 2.26 **Schéma de principe du dispositif étudié (vue en coupe).**

3 CINÉTIQUE

Dans un modèle mécanique, la première étape de la modélisation est la cinématique : la modélisation du mouvement. Les étapes suivantes consistent à formuler les principes de conservation de la mécanique dans le cadre de la cinématique retenue, conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et, le cas échéant, second principe de la thermodynamique. Par exemple, formuler pour les systèmes de solides indéformables le principe fondamental de la dynamique (ou conservation de la quantité de mouvement), requiert l'introduction de la notion de *torseur cinétique* ou de torseur des quantités de mouvement, que nous présenterons dans ce chapitre.

La quantité de mouvement mesure le mouvement de la *matière*, dont la quantité est mesurée par la *masse*. La masse (unité le kg) a été définie en 1799 par la masse d'un litre d'eau, puis par celle du fameux étalon en platine (voir le site [8] pour plus de détails intéressants). Le principe de conservation de la masse formulé dans le cadre de la cinématique des systèmes de solides indéformables, permettra de faire apparaître les notions de centre et de tenseur de masse (ou de centre et de tenseur d'inertie) dont on verra l'utilité pour l'écriture du principe fondamental de la dynamique et de la conservation de l'énergie.

3.1 TORSEUR CINÉTIQUE

3.1.1 Résultante cinétique

Pour un point matériel M de masse élémentaire dm la quantité de mouvement associée au mouvement de ce point par rapport à un référentiel du mouvement R est :

$$\mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) = \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\,\mathrm{d}m.$$

Considérons maintenant non plus un point matériel, mais un solide continu S, la résultante cinétique est alors définie comme suit, à l'instant t :

$$\mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) = \int_{\forall \mathrm{M}\in \mathrm{S}} \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\,\mathrm{d}m.$$

Si le solide est homogène de masse volumique ϱ (resp. surfacique ou linéique) on a :

$$\mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) = \int_{\forall \mathrm{M}\in \mathrm{S}} \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\,\varrho\,\mathrm{d}v.$$

Remarque

la quantité de mouvement étant calculée à partir du vecteur vitesse, elle dépend du choix du référentiel du mouvement R.

3.1.2 Moment cinétique

Par ailleurs, l'énergie cinétique T d'un point matériel M de masse élémentaire dm en mouvement par rapport à R est telle que :

$$2\mathrm{T}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) = \mathbf{p}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) \cdot \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}).$$

Considérons maintenant, non plus un point matériel, mais un solide continu S, l'expression précédente se généralise au solide continu indéformable en introduisant la notion de torseur cinétique $\left\{ \mathcal{C}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \right\}$:

$$2\mathrm{T}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) = \left\{ \mathcal{C}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \right\},$$

où le torseur cinématique $\left\{ \mathcal{V}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \right\}$ représente le champ des vitesses des points M du solide S, et où les composantes du torseur cinétique $\left\{ \mathcal{C}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \right\}$ sont la résultante cinétique $\mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R})$ et le moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R})$ en un point A :

$$\left\{ \mathcal{C}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \\ \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) \end{array} \right\}_{\mathrm{A}}.$$

Avec ces notations, l'énergie cinétique s'écrit comme suit :

$$2\mathrm{T}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) = \mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \cdot \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) + \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}),$$

et vaut par ailleurs :

$$2\mathrm{T}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) = \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) \cdot \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m.$$

Soit :

$$\begin{aligned} 2\mathrm{T}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) \quad &= \quad \left(\int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m \right) \\ &\quad \cdot \left(\mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) + \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \right). \end{aligned}$$

En appliquant la formule de changement de point pour $\mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R})$:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{T}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) \quad &= \quad \int \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) \cdot (\mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \wedge \mathbf{MA})\, \mathrm{d}m \\ &\quad + \int \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}). \end{aligned}$$

On en déduit que le moment cinétique doit vérifier :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) = \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} (\mathbf{AM} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}))\, \mathrm{d}m \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}).$$

Définition

On définit donc le moment cinétique au point A comme la quantité :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) = \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m.$$

Remarque

Le moment cinétique dépend du choix du référentiel du mouvement R. Il dépend également du point A choisi. Ce point A est un point quelconque, n'appartenant pas nécessairement au solide S.

Propriété. On montre aisément que le moment cinétique ainsi défini respecte bien la règle de changement de point du champ des moments d'un torseur :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{B}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) &= \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{BM} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m = \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} (\mathbf{BA} + \mathbf{AM}) \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m \\ &= \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) + \mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \wedge \mathbf{AB}.\end{aligned}$$

$\left\{ \mathcal{C}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \right\}$ est donc bien un torseur, appelé torseur cinétique de S par rapport à R et noté :

$$\{\mathcal{C}(\mathrm{S}/\mathrm{R})\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) = \displaystyle\int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) = \displaystyle\int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m \end{array} \right\}_{\mathrm{A}}.$$

3.1.3 Expression condensée du torseur cinétique

L'application du principe de conservation de la masse, permet *via* l'introduction du centre et du tenseur de masse (ou d'inertie) d'exprimer le torseur cinétique et l'énergie cinétique de manière condensée.

a) Conservation de la masse

1. Système matériel : un système matériel est un système sur lequel est définie une mesure de la masse. La masse est habituellement définie à l'aide d'une densité volumique, surfacique ou linéique.
2. Système matériel à masse conservative : un système matériel D est dit à masse conservative si toute partie d de D, qu'on suit au cours du temps, a une masse constante.

$$\forall \mathrm{d} \in \mathrm{D} \quad \forall t \quad m(\mathrm{d},\, t) = \text{constante} = m(\mathrm{d}).$$

Si l'on exprime la masse à l'aide d'une densité volumique :

$$\forall \mathrm{d} \in \mathrm{D} \quad m(\mathrm{d},\, t) = \int_{\mathrm{d}(t)} \varrho \,\mathrm{d}v = \text{constante}.$$

alors :

$$\frac{\mathrm{d}m(\mathrm{d},\, t)}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathrm{d}(t)} \left[\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho \,\mathrm{div}\, \mathbf{V}_t \right] \mathrm{d}v = 0.$$

Cela implique que :

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho \,\mathrm{div}\, \mathbf{V}_t = 0.$$

Cette expression de la conservation de la masse est appelée l'équation de continuité de la mécanique des milieux continus tridimensionnels.

b) Conséquence

Plus généralement, si l'on intègre des fonctions régulières $h(\mathrm{P}, t)$ relativement à la densité volumique :

$$H(t) = \int_{\mathrm{D}_t} h(\mathrm{P}, t) \varrho \,\mathrm{d}v.$$

Alors :

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathrm{D}_t} \left[\frac{\mathrm{d}(h(\mathrm{P}, t)\varrho)}{\mathrm{d}t} + h(\mathrm{P}, t)\varrho \,\mathrm{div}\, \mathbf{V}_t \right] \mathrm{d}v.$$

Si l'on développe cette expression et si l'on regroupe les termes pour faire apparaître l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_{\mathrm{D}_t} \varrho \frac{\mathrm{d}h(\mathrm{P}, t)}{\mathrm{d}t} + h(\mathrm{P}, t) \left[\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho \,\mathrm{div}\, \mathbf{V}_t \right] \mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathrm{D}_t} \varrho \frac{\mathrm{d}h(\mathrm{P}, t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}v). \end{aligned}$$

Ainsi, pour un système matériel à masse conservative et pour toute fonction $h(\mathrm{P}, t)$ régulière :

$$H(t) = \int_{\mathrm{D}_t} \varrho \, h(\mathrm{P}, t) \mathrm{d}v \Rightarrow \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathrm{D}_t} \varrho \frac{\mathrm{d}h(\mathrm{P}, t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}v.$$

c) Conséquence pour la résultante du torseur cinétique

Nous introduisons maintenant le centre de masse C défini par l'équation ci-dessous, où $\mathrm{M_S}$ est la masse du solide S :

$$\mathrm{M_S}\mathbf{AC} = \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} \mathbf{AM} \,\mathrm{d}m \quad \forall A.$$

Remarque

La masse M_S et le centre de masse C, d'un solide indéformable S, sont des grandeurs intrinsèques à ce solide. Dans le repère attaché au solide indéformable S, la position du centre de masse est fixe. La masse du solide S est également constante.

Remarque

Le centre de masse C est souvent supposé confondu avec le centre de gravité G, ce qui signifie que nous faisons alors l'hypothèse $\mathbf{g} = \mathbf{cste}$ pour le problème traité, ce qui revient à considérer de petits objets devant les dimensions de la Terre.

Nous choisissons un point A particulier : l'origine O du repère R et dérivons les deux membres de l'égalité :

$$\left.\frac{\mathrm{d}M_S\mathbf{OC}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\frac{\mathrm{d}\left(\int_{M\in S}\mathbf{OM}\,\mathrm{d}m\right)}{\mathrm{d}t}\right|_R .$$

D'après les propriétés de conservation de la masse, on peut permuter les opérateurs dérivée temporelle et intégrale spatiale, en conséquence :

$$M_S\mathbf{V}(C/R) = \int_{M\in S}\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R \mathrm{d}m = \int_{M\in S}\mathbf{V}(M/R)\,\mathrm{d}m.$$

La résultante cinétique du solide S s'exprime donc directement comme suit :

$$\mathbf{p}(S/R) = M_S\mathbf{V}(C/R).$$

d) Conséquence pour le moment cinétique

Il existe donc une expression condensée (et non plus intégrale) de la résultante cinétique d'un solide faisant intervenir la masse M_S et le centre de masse C du solide S. Nous allons montrer que nous pouvons aussi proposer une expression condensée du moment cinétique en C.



Attention, si l'expression de la résultante cinétique reste la même quel que soit le point d'expression A du torseur cinétique, ce n'est pas le cas du moment cinétique.

Soit un point A quelconque :

$$\boldsymbol{\sigma}(A, S/R) = \int_{\forall M\in S}\mathbf{AM}\wedge\mathbf{V}(M/R)\,\mathrm{d}m.$$

En appliquant la formule de changement de point pour le champ de vitesse :

$$\boldsymbol{\sigma}(A, S/R) = \int_{\forall M\in S}\mathbf{AM}\wedge\left(\mathbf{V}(A\in S/R) + \boldsymbol{\Omega}(A/R)\wedge\mathbf{AM}\right)\mathrm{d}m.$$

En regroupant les termes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) &= \left(\int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{AM}\,\mathrm{d}m\right) \wedge \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) \\ &\quad - \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{AM} \wedge \left(\mathbf{AM} \wedge \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R})\right)\,\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) &= \mathrm{M_S}\mathbf{AC} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) \\ &\quad - \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{AM} \wedge \left(\mathbf{AM} \wedge \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R})\right)\,\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

Si on choisit le point C pour exprimer ce moment cinétique alors il vient :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{C}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) = -\int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{CM} \wedge \left(\mathbf{CM} \wedge \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{C}/\mathrm{R})\right)\,\mathrm{d}m.$$

Soit :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{C}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) = \underline{\underline{J}}(\mathrm{C}, \mathrm{S}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}),$$

où $\underline{\underline{J}}(\mathrm{C}, \mathrm{S})$ est l'application linéaire qui à tout vecteur $\mathbf{u}$ associe le vecteur $\mathbf{v}$ suivant :

$$\mathbf{v} = \underline{\underline{J}}(\mathrm{C}, \mathrm{S}) \cdot \mathbf{u} = -\int_{\mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{CM} \wedge (\mathbf{CM} \wedge \mathbf{u})\,\mathrm{d}m.$$

Remarque

Nous avons introduit un tenseur appelé tenseur de masse ou tenseur d'inertie $\underline{\underline{J}}(\mathrm{C}, \mathrm{S})$ d'un solide indéformable S. Ce tenseur est une grandeur intrinsèque au solide S. Il est constant dans un repère attaché au solide indéformable S et peut donc être défini une fois pour toute pour le solide.

Le tenseur de masse ou tenseur d'inertie se représente par une matrice notée $[J(\mathrm{C}, \mathrm{S})]_\mathrm{B}$ dans une base B donnée et appelée la matrice d'inertie de S calculée au point C et exprimée dans la base B. Nous avons, dans cette base, la relation matricielle $[v] = [J(\mathrm{C}, \mathrm{S})]_\mathrm{B}\,[u]$. Notons $(\mathbf{x}_\mathrm{i}, \mathrm{i} \in (1, 2, 3))$ les trois vecteurs unitaires constituant la base B, les composantes $J_{\mathrm{ij}}(\mathrm{C}, \mathrm{S})$ de la matrice se calculent comme suit :

$$J_{\mathrm{ij}}(\mathrm{C}, \mathrm{S}) = -\mathbf{x}_\mathrm{j} \cdot \int_{\mathrm{M} \in \mathrm{S}} (\mathbf{CM} \wedge (\mathbf{CM} \wedge \mathbf{x}_\mathrm{i}))\,\mathrm{d}m$$

Remarque

Le calcul du terme $\underline{\underline{J}}(\mathrm{C}, \mathrm{S}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R})$ correspond au produit de la matrice $[J(\mathrm{C}, \mathrm{S})]_\mathrm{B}$ par le vecteur colonne $\left[\Omega\right]$ représentant $\boldsymbol{\Omega}$. On trouve dans la plupart des ouvrages les termes d'opérateur d'inertie (le tenseur) et de matrice d'inertie.

Remarque

L'introduction du *tenseur d'inertie* permet, plus généralement, de fournir une expression condensée du moment cinétique d'un solide S en un point A quelconque :

$$\boldsymbol{\sigma}(A, S/R) \quad = \quad M_S \mathbf{AC} \wedge \mathbf{V}(A \in S/R) + \underline{\underline{J}}(A, S) \cdot \boldsymbol{\Omega}(S/R),$$

où $\underline{\underline{J}}(A, S)$ est l'application linéaire qui à tout vecteur $\mathbf{u}$ associe le vecteur $\mathbf{v}$ suivant :

$$\mathbf{v} = \underline{\underline{J}}(A, S) \cdot \mathbf{u} = -\int_{M \in S} (\mathbf{AM} \wedge (\mathbf{AM} \wedge \mathbf{u}))\,\mathrm{d}m.$$



Attention, le point A peut être quelconque et n'est pas nécessairement un point du solide S, cependant si le point A n'est pas fixe dans l'espace $\mathcal{E}_S$ attaché au solide indéformable S alors le tenseur $\underline{\underline{J}}(A, S)$ n'est pas un tenseur constant de $\mathcal{E}_S$.

3.1.4 Cas particuliers

On distingue deux cas particuliers courants et importants.

1. Le point A est fixe dans R.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(A \in S/R) &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\sigma}(A, S/R) &= \underline{\underline{J}}(A, S) \cdot \boldsymbol{\Omega}(S/R). \end{aligned}$$

2. On choisit de calculer le moment cinétique au centre de masse C.

$$\begin{aligned} \mathbf{CC} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\sigma}(C, S/R) &= \underline{\underline{J}}(C, S) \cdot \boldsymbol{\Omega}(S/R). \end{aligned}$$

La forme de l'expression du moment cinétique se simplifie de la même manière dans les deux cas, mais pour des raisons différentes.

3.1.5 Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe

On appelle moment cinétique par rapport à un axe Δ dans un référentiel R la quantité scalaire $\sigma_\Delta = \boldsymbol{\sigma}(A, S/R) \cdot \mathbf{u}$ avec $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire de Δ et A un point quelconque appartenant à Δ. σ_Δ est invariant pour tout point $A \in \Delta$.

DÉMONSTRATION. La relation caractéristique (de torseur) du torseur cinétique implique :

$$\forall A, A' \in \Delta, \quad \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \mathbf{u} = (\boldsymbol{\sigma}_{A'} + \mathbf{AA'} \wedge \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}_{A'}\mathbf{u} + (\mathbf{AA'} \wedge \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}.$$

Or on sait que A et A' appartiennent à Δ donc le produit mixte est nul. Donc $\forall A, A' \in \Delta, \quad \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}_{A'} \cdot \mathbf{u}$. CQFD ! □

EXEMPLE : CALCUL DU TORSEUR CINÉTIQUE D'UNE BARRE

Considérons une barre d'épaisseur négligeable, de longueur l, homogène de masse m en liaison pivot d'axe z avec le bâti.

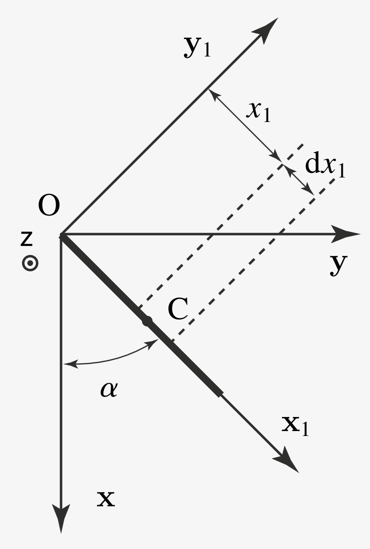


Figure 3.1 **Tige en rotation.**

Question : calculer le torseur cinétique au centre de masse et au point O origine du repère.

$$\left\{ \mathcal{V}(\mathrm{S/R}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m\mathbf{V}(\mathrm{G/R}) \\ \displaystyle\int_{\forall \mathrm{P} \in \mathrm{S}} \mathbf{CP} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{G/R})\mathrm{d}m \end{array} \right\}_{\mathrm{C}}.$$

Le vecteur position $\mathbf{OC}$ vaut $l/2\,\mathbf{x}_1$ ce qui donne : $\mathbf{V}(\mathrm{C/R}) = l/2\dot{\alpha}\,\mathbf{y}_1$. Pour calculer le moment cinétique, il faut prendre un petit élément de longueur $\mathrm{d}x_1$ situé à une distance x_1 de C. L'élément de masse $\mathrm{d}m$ vaut $m/l\ \mathrm{d}x_1$; m/l représente la masse linéique de la tige. On a alors :

$$\int_{\forall \mathrm{P} \in \mathrm{S}} \mathbf{CP} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M/R})\,\mathrm{d}m = \int_0^l (x_1 - l/2)\mathbf{x}_1 \wedge l x_1 \dot{\alpha}\mathbf{y}_1\,\mathrm{d}m = \frac{ml^2}{12}\dot{\alpha}\mathbf{z}.$$

Donc le torseur cinétique au point C se résume à :

$$\left\{ \mathcal{C}(\mathrm{S/R}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} (ml/2)\dot{\alpha}\mathbf{y}_1 \\ (ml^2/12)\dot{\alpha}\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{C}}.$$

On peut effectuer ce calcul en O et on obtient : $\dfrac{ml^2}{3}\dot{\alpha}\mathbf{z}$ soit par intégration soit par utilisation de la relation de moment de torseur.

3.2 Calcul des centres de masse

3.2.1 Additivité

La définition du centre masse permet d'écrire que si le système S considéré peut-être décomposé en plusieurs parties S_1 et S_2 simples (i.e. dont les centres de masse C_1 et C_2 sont simples à déterminer) alors le centre de masse C de S est tel que :

$$\begin{aligned}\int_{A\in S} \mathbf{OA}\,\mathrm{d}m &= \int_{A\in S_1} \mathbf{OA}\,\mathrm{d}m + \int_{A\in S_2} \mathbf{OA}\,\mathrm{d}m \\ &= M_1\,\mathbf{OC_1} + M_2\,\mathbf{OC_2} = (M_1 + M_2)\,\mathbf{OC}.\end{aligned}$$

3.2.2 Symétries

Un système S possède une symétrie matérielle par rapport à un point, une droite ou un plan si pour tout point A du système, il existe un point B symétrique de A (par rapport au point, à la droite ou au plan) tel que : (1) B appartient à S et (2) $\varrho(A) = \varrho(B)$ avec ϱ la masse volumique locale.

Théorème

Si un système possède un élément de symétrie, alors son centre de masse appartient nécessairement à cet élément de symétrie.

DÉMONSTRATION. Utiliser deux petits éléments de matière symétrique dont le centre de masse est situé sur l'élément de symétrie et le fait que la somme de deux vecteurs parallèles à une même droite (ou plan) est un vecteur parallèle à cette droite (plan). □

On peut se servir de ces propriétés pour déterminer le centre de masse d'une plaque homogène trouée par exemple. Il suffit de considérer les éléments de symétrie de la plaque pleine, du trou et d'imaginer que le trou correspond à une masse négative de façon à reconstituer la plaque trouée. Le calcul est alors élémentaire.

3.3 Calcul des moments d'inertie et de l'opérateur d'inertie

3.3.1 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan

Définition

Soit un système matériel S. Son moment d'inertie par rapport à un plan P est donné par :

$$I_P = \int_{M\in S} \mathbf{HM}^2 \mathrm{d}m.$$

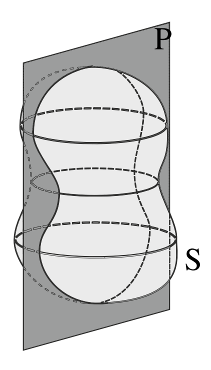


Figure 3.2 **Moment d'inertie par rapport à un plan.**

Dans cette expression le point H correspond à la projection orthogonale de M sur le plan P. Donc HM représente la distance entre le point M et le plan P. Lorsque l'on effectue l'intégration, pour M donné le point H l'est aussi mais comme M varie lors de l'intégration, H varie aussi.

DÉMONSTRATION. Soit un repère (O, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) dans le plan P et $\mathbf{w}$ un vecteur unitaire normal au plan. On a grâce à Pythagore : $HM^2 = OM^2 - OH^2$ car H est la projection orthogonale de M sur P. Soit $\mathbf{OM} = u\mathbf{u} + v\mathbf{v} + w\mathbf{w}$. On a donc $\mathbf{OM}^2 = u^2 + v^2 + w^2$ et $\mathbf{OH}^2 = u^2 + v^2$. Donc $\mathbf{HM}^2 = w^2 = (\mathbf{OA}.\mathbf{w})^2$. Donc le moment d'inertie vaut en coordonnées cartésiennes :

$$I_{x\mathrm{O}y} = \int z^2 \mathrm{d}m \quad I_{x\mathrm{O}z} = \int y^2 \mathrm{d}m \quad I_{y\mathrm{O}z} = \int x^2 \mathrm{d}m. \qquad \square$$

3.3.2 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

Définition

Soit un système matériel S. Son moment d'inertie par rapport à une droite Δ est donné par :

$$I_\Delta = \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} \mathbf{HM}^2 \mathrm{d}m.$$

Dans cette expression le point H correspond à la projection orthogonale de M sur la droite Δ. Donc HM représente la distance entre le point M et la droite. Soit un repère (O, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) dans un plan P perpendiculaire à la droite Δ par rapport à laquelle on veut trouver le moment d'inertie. Le vecteur $\mathbf{w}$ est un vecteur normal au plan dont suivant Δ. On a toujours grâce à Pythagore : $HM^2 = OM^2 - OH^2$. Soit $\mathbf{OM} = u\mathbf{u} + v\mathbf{v} + w\mathbf{w}$. On a donc $OM^2 = u^2 + v^2 + w^2$ et $OH^2 = w^2$. Donc $HM^2 = u^2 + v^2 = (\mathbf{OM} \wedge \mathbf{w})^2$. Donc le moment d'inertie vaut en coordonnées cartésiennes :

$$I_{\mathrm{O}x} = \int (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m \quad I_{\mathrm{O}y} = \int (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}m \quad I_{\mathrm{O}z} = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m.$$



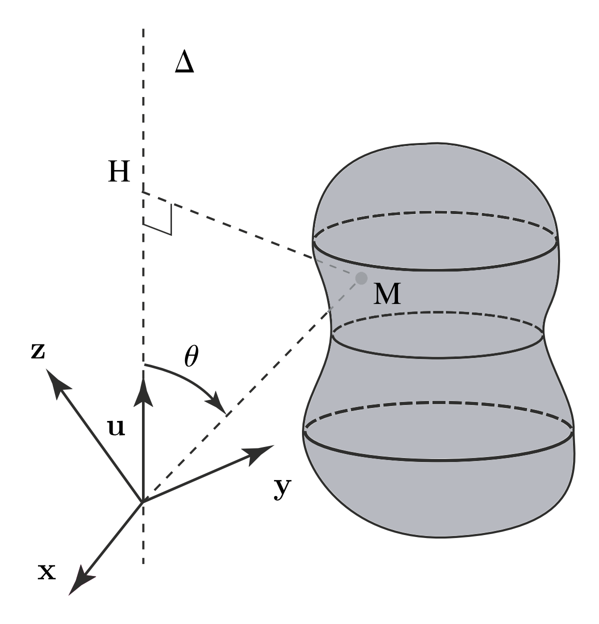


Figure 3.3 Moment d'inertie par rapport à un axe

Remarque
On constate que : $I_{Ox} = I_{xOz} + I_{xOy}$. On peut voir l'axe O$x$ comme intersection des deux plans xOy et xOz.

Théorème

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires se coupant suivant cet axe.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathbf{u}$ un vecteur directeur de l'axe $\Delta = \mathrm{O}x$. On choisit un vecteur unitaire $\mathbf{v}$ sur l'un des plans $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0)$ et de même $\mathbf{w}$ sur l'autre plan tel que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ forme un trièdre direct. Soit O sur la droite Δ. On en déduit que $I_{Ox} = I_{xOz} + I_{xOy}$. □

3.3.3 Calcul du moment d'inertie par rapport à un axe

Nous pouvons remarquer sur la figure 3.4 que $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{OM}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{OM}\| \sin\theta$. Dans le triangle OHM on a $\|\mathbf{MH}\| = \|\mathbf{OM}\| \sin\theta$; donc $\|\mathbf{MH}\| = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{OM}\|$.

Or dans la base R les composantes de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{OM}$ sont égales à :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{OM} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix}.$$

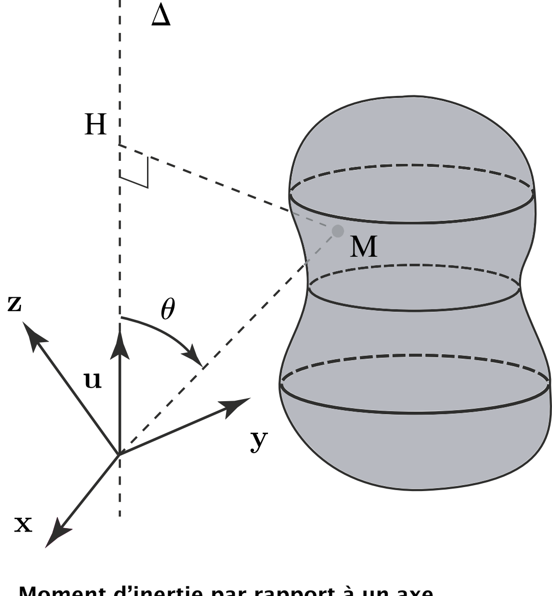


Figure 3.4 Moment d'inertie par rapport à un axe.

Donc $\mathbf{MH}^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$ ce qui peut s'écrire :

$$\mathbf{MH}^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy.$$

On peut en déduire avec α, β et γ indépendants de l'intégration sur le solide S :

$$I_\Delta = \alpha^2 I_{\mathrm{O},\mathbf{x}} + \beta^2 I_{\mathrm{O},\mathbf{y}} + \gamma^2 I_{\mathrm{O},\mathbf{z}} - 2\beta\gamma I_{\mathrm{O}\mathbf{y};\mathrm{O}\mathbf{z}} - 2\gamma\alpha I_{\mathrm{O}\mathbf{z};\mathrm{O}\mathbf{x}} - 2\alpha\beta I_{\mathrm{O}\mathbf{x};\mathrm{O}\mathbf{y}}.$$

On note souvent :

$$\begin{array}{ll} A = I_{\mathrm{O},\mathbf{x}} = \displaystyle\int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m & D = I_{\mathrm{O},\mathbf{y},\mathbf{z}} = \displaystyle\int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} yz\,\mathrm{d}m \\ B = I_{\mathrm{O},\mathbf{y}} = \displaystyle\int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} (z^2 + x^2)\,\mathrm{d}m & E = I_{\mathrm{O},\mathbf{z},\mathbf{x}} = \displaystyle\int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} zx\,\mathrm{d}m \\ C = I_{\mathrm{O},\mathbf{z}} = \displaystyle\int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m & F = I_{\mathrm{O},\mathbf{x},\mathbf{y}} = \displaystyle\int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} xy\,\mathrm{d}m \end{array}.$$

D'où :

$$I_\Delta = \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\beta\gamma D - 2\gamma\alpha E - 2\alpha\beta F.$$

3.3.4 Calcul du tenseur d'inertie

Nous venons de calculer le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque passant par un point O quelconque. On a :

$$I_{\Delta(\mathrm{O},\mathbf{u})} = \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} (\mathbf{OM} \wedge \mathbf{u})^2 \,\mathrm{d}m = \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} (\mathbf{OM} \wedge \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{OM} \wedge \mathbf{u}) \,\mathrm{d}m.$$

Soit $\mathbf{OM} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{w}$. On peut alors mener une permutation circulaire du produit mixte $(\mathbf{w}, \mathbf{OM}, \mathbf{u})$ ce qui donne :

$$I_{\Delta(\mathrm{O},\mathbf{u})} = \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} \mathbf{u}.(\mathbf{w} \wedge \mathbf{OM}) \,\mathrm{d}m.$$

Comme le vecteur $\mathbf{u}$ ne dépend pas de l'intégration, on le sort de l'intégrale et on obtient alors :

$$I_{\Delta(\mathrm{O},\mathbf{u})} = \mathbf{u} \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} ((\mathbf{OM} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{OM}) \,\mathrm{d}m = \mathbf{u}.\mathbf{v},$$

avec : $\mathbf{v} = \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} ((\mathbf{OM} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{OM}) \,\mathrm{d}m$. Nous retrouvons le résultat déjà mentionné relatif au tenseur d'inertie.

Définition

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\mathbf{u}$ est donc donné par :

$$I_{\Delta(\mathrm{O},\mathbf{u})} = \mathbf{u} \cdot (\underline{\underline{J}} \cdot \mathbf{u}).$$

Quels sont les éléments de la matrice représentative du tenseur d'inertie dans une base donnée ? Soit (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$) un repère tel que $\mathrm{O} \in \Delta_{(\mathbf{u},\mathrm{O})}$. On suppose que les composantes de $\mathbf{u}$ sont (α, β, γ). Soit un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ du système. Nous savons que :

$$\mathbf{OM} \wedge \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{OM} \wedge \mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -z^2 - y^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc en intégrant sur le système on trouve :

$$
\begin{aligned}
[J(\mathrm{O})]\,[\mathbf{u}] &= \int_{\mathrm{M}\in S} -\mathbf{OM} \wedge (\mathbf{OM} \wedge \mathbf{u})\mathrm{d}m \\
&= \begin{pmatrix} \int (z^2+y^2)\mathrm{d}m & -\int xy\mathrm{d}m & -\int xz\mathrm{d}m \\ -\int xy\mathrm{d}m & \int (x^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int yz\mathrm{d}m \\ -\int xz\mathrm{d}m & -\int yz\mathrm{d}m & \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Comme l'intégration sur le système est indépendante du vecteur $\mathbf{u}$ on en déduit que la matrice se résume à

$$
[J(\mathrm{O})] = \begin{pmatrix} I_{\mathrm{O}x} & I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{\mathrm{O}y} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{\mathrm{O}z} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}.
$$

3.4 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un point

Soit un système matériel S. Son moment d'inertie par rapport à un point N est donné par :

$$
I_{\mathrm{N}} = \int_{\mathrm{M}\in \mathrm{S}} \mathbf{NM}^2\mathrm{d}m.
$$

Dans cette expression le point N correspond à la projection de M sur le point N ce qui montre qu'en fait on a le même type de définition que pour le moment d'inertie par rapport à un axe ou à un plan. Soit N le point O origine d'un repère cartésien.

$$
I_{\mathrm{O}} = \int (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}m.
$$

Remarque

$I_{\mathrm{O}} = I_{x\mathrm{O}z} + I_{x\mathrm{O}y} + I_{y\mathrm{O}z} = \frac{1}{2}(I_{\mathrm{O}x} + I_{\mathrm{O}y} + I_{\mathrm{O}z})$. On peut voir l'axe O$x$ comme intersection des deux plans $x\mathrm{O}y$ et $x\mathrm{O}z$.

Théorème

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires se coupant suivant cet axe.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathbf{u}$ un vecteur directeur de l'axe $\Delta = \mathrm{O}x$. On choisit un vecteur unitaire $\mathbf{v}$ sur l'un des plans $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0)$ et de même $\mathbf{w}$ sur l'autre plan tel que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ forme un trièdre direct. Soit O sur la droite Δ. On en déduit que $I_{\mathrm{O}x} = I_{x\mathrm{O}z} + I_{x\mathrm{O}y}$. □

3.5 THÉORÈME D'HUYGHENS

Christian Huyghens était un scientifique hollandais (1629, 1695) né à La Haye et qui s'est intéressé aux chocs entre solides durs ou mous (à la suite de Descartes), à l'attraction entre corps et au mouvement des planètes (à la suite de Newton) et qui a rédigé des notes sur l'harmonie.

Théorème

Soit un système S de masse m de centre d'inertie C. Soit I_Δ. Considérons un axe Δ_C parallèle à Δ et passant par C. Soit d la distance entre ces deux axes.

$$I_\Delta = I_{\Delta_\mathrm{C}} + md^2.$$

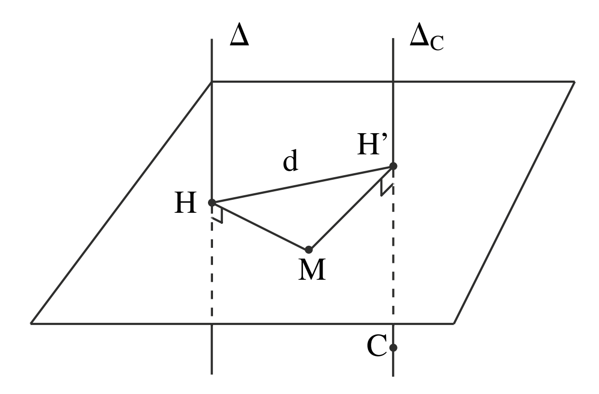


Figure 3.5 Théorème d'Huyghens

DÉMONSTRATION. Soit H la projection orthogonale d'un point A du système sur Δ et H' sa projection orthogonale sur Δ_C. On peut remarquer que A, H et H' forment un triangle dans un plan perpendiculaire aux deux droites Δ et Δ_C. Donc HH' vaut la distance d et ceci pour tous les points M du système S. On a $HM^2 = (\mathbf{HH'} + \mathbf{H'M})^2$. Donc $I_\Delta = \int HM^2 \mathrm{d}m = \int (\mathbf{HH'}^2 + \mathbf{H'M}^2 + 2\mathbf{HH'} \cdot \mathbf{H'M})\, \mathrm{d}m$. Donc $I_\Delta = \int \mathbf{HH'}^2\, \mathrm{d}m + \int \mathbf{H'M}^2\, \mathrm{d}m + \int 2\mathbf{HH'}.\mathbf{H'M}\, \mathrm{d}m$. Or on sait que $HH' = d$.

Donc $I_\Delta = d^2 m + 2\mathbf{HH'} \int \mathbf{H'M}\, \mathrm{d}m + I_{\Delta_C}$.

Il nous faut donc montrer que le deuxième terme de droite est nul. Soit $\mathbf{HM} = \mathbf{HC} + \mathbf{CM}$. Donc

$$\mathbf{HH'} \int \mathbf{H'M}\, \mathrm{d}m = \int \mathbf{HH'} \cdot \mathbf{H'C}\, \mathrm{d}m + \int \mathbf{HH'}.\mathbf{CM}\, \mathrm{d}m.$$

Or nous savons que $\forall$ M, les points H et H' sont dans un plan perpendiculaire aux deux droites Δ et Δ_C. Donc le premier terme est nul car $\mathbf{HH'} \cdot \mathbf{H'C} = 0$. Le terme $\int \mathbf{HH'} \cdot \mathbf{CM}\, \mathrm{d}m$ est nul par définition du centre d'inertie C. Donc on obtient bien la relation cherchée. □

Remarque

Sachant calculer le moment d'inertie par un axe passant par C, on saura le faire pour un axe quelconque parallèle. On constate que le moment d'inertie par rapport à un axe est minimal si cet axe passe par le centre d'inertie.

3.6 Théorème d'Huyghens Steiner

Soit un système de masse m et son opérateur d'inertie $J(\mathrm{S})$ défini en A quelconque. On a :

$$\begin{aligned} I_{\Delta(\mathrm{A},\mathbf{u})} &= \mathbf{u} \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} (\mathbf{AM} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{AM}\, \mathrm{d}m = I_{\Delta(\mathrm{A},\mathbf{u})} \\ &= \mathbf{u} \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} \big((\mathbf{AG} + \mathbf{GM}) \wedge \mathbf{u}\big) \wedge \mathbf{AM}\, \mathrm{d}m. \end{aligned}$$

On peut en déduire

$$\begin{aligned} I_{\Delta(\mathrm{A},\mathbf{u})} &= \mathbf{AG} \wedge \left(\mathbf{u} \wedge \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} (\mathbf{AO} + \mathbf{OM})\right) \mathrm{d}m + \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} \mathbf{CM} \\ &+ \mathbf{u} \wedge (\mathbf{AC} + \mathbf{CM})\, \mathrm{d}m. \end{aligned}$$

Sachant que le point C est centre de masse on en déduit immédiatement

$$I_{\Delta(\mathrm{A},\mathbf{u})} = I_{\Delta(\mathrm{C},\mathbf{u})} + m\mathbf{AC} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{AC}).$$

$$[J(\mathrm{O})]_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = [J(\mathrm{O})]_{(\mathbf{x'},\mathbf{y'},\mathbf{z'})} + \begin{pmatrix} M(y_C^2 + z_C^2) & -M x_C y_C & -M x_C z_C \\ -M x_C y_C & M(z_C^2 + x_C^2) & -M y_C z_C \\ -M x_C z_C & -M y_C z_C & M(x_C^2 + y_C^2) \end{pmatrix}_{(\mathbf{x'},\mathbf{y'},\mathbf{z'})}.$$

3.7 Axes principaux d'inertie

La matrice d'inertie caractéristique du système est symétrique, réelle. On a donc dans ce cas trois valeurs propres réelles et trois directions associées appelées **a**xes principaux d'inertie. Ces directions correspondent à des directions de symétrie du système (symétrie au sens des moments d'inertie). Dans la pratique, les solides étudiés ont souvent des symétries qu'il faut utiliser.

Théorème

Si le système possède un plan de symétrie matérielle alors tout axe perpendiculaire à ce plan est axe principal d'inertie.

Démonstration. Soit un repère (O, x, y) du plan P et l'axe (O, z) perpendiculaire. On peut toujours calculer $\int xz\mathrm{d}m$ et $\int yz\mathrm{d}m$ en choisissant un élément dm symétrique par rapport au plan P, $z_{\mathrm{M}} = -z_{\mathrm{M'}}$ avec $x_{\mathrm{M}} = x_{\mathrm{M}}$ et $y_{\mathrm{M}} = y_{\mathrm{M'}}$, M et M' étant les points symétriques de S par rapport à P de masse respectives dm et $\mathrm{d}m' = \mathrm{d}m$. Donc xz devient une fonction impaire dont l'intégrale sur S est nulle (tout comme yz). En conséquence $I_{xy} = I_{yz} = 0$. On en déduit que l'axe (O, z) est axe principal d'inertie (valeur propre). □

Théorème

Si le système possède un axe de symétrie matérielle alors cet axe est un axe principal d'inertie.

Démonstration. Soit l'axe (O, z) axe de symétrie. On peut toujours calculer $\int xz\mathrm{d}m$ et $\int yz\mathrm{d}m$ en choisissant un élément dm symétrique par rapport à l'axe (O, z). On a $x_{\mathrm{M}} = -x_{\mathrm{M'}}$ et $y_{\mathrm{M}} = -y_{\mathrm{M'}}$, M et M' étant les points symétriques de S par rapport à (O, x) de masse respectives dm et $\mathrm{d}m' = \mathrm{d}m$. On a $z_{\mathrm{M}} = z_{\mathrm{M'}}$. Donc xz devient une fonction impaire dont l'intégrale sur S est nulle (tout comme yz). En conséquence $I_{xy} = I_{yz} = 0$. On en déduit que l'axe (O, z) est axe principal d'inertie (valeur propre). □

Remarque

Ayant deux axes principaux d'inertie, le troisième est celui qui permet d'avoir un trièdre orthogonal.

Figure 3.6 Plan de symétrie.

Théorème

Si un système admet un axe de symétrie (O, z) de révolution pour sa distribution de masse, alors tout trièdre orthogonal incluant cet axe de révolution est principal d'inertie. Le système est dit cylindrique et sa matrice d'inertie est de la forme :

$$[J(\mathrm{O}]_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I' \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. Si (O, z) est axe de symétrie, tout plan contenant (O, z) est plan de symétrie. Toute droite perpendiculaire à (O, z) est axe principal d'inertie. □

Définition

Si un système est dit sphérique si sa matrice d'inertie est de la forme :

$$[J(\mathrm{O}] = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}_{(.,.,.)}.$$

3.7.1 Cas général

Dans ce cas, on reprend l'expression :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) = \mathrm{M}_S \mathbf{AG} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) + \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{AM} \wedge \big(\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \wedge \mathbf{AM}\big)\, \mathrm{d}m.$$

On constate que le second terme correspond à la définition de l'opérateur d'inertie. Donc on a :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) = \mathrm{M}_\mathrm{S} \mathbf{AC} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) + \underline{\underline{J}}(\mathrm{A},\ \mathrm{S}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}).$$

Dans les deux cas particuliers d'un point A fixe dans R ou de A pris en C on a :

1. Le point A est fixe dans R.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) = \underline{\underline{J}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}).$$

2. Le point A est pris comme C.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{C}, \mathrm{S}/\mathrm{R}) = \underline{\underline{J}}(\mathrm{C}, \mathrm{S}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}).$$

3.8 Énergie cinétique d'un solide

On a vu que l'énergie cinétique T d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère R est donnée par :

$$\mathrm{T}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) = \frac{1}{2} \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{V}^2(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m.$$

Or nous pouvons écrire en supposant que le point A appartient au au solide S : $\mathbf{V}(\mathrm{M} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) = \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) + \mathbf{MA} \wedge \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R})$. Donc on a finalement comme expression de 2T :

$$\begin{aligned} 2\mathrm{T}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) &= \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} (\mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) + \mathbf{MA} \wedge \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R})) \cdot \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m \\ &= \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) \cdot \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \cdot \int \mathbf{AM} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\, \mathrm{d}m. \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette dernière expression les éléments de réduction du torseur cinématique et du torseur cinétique.

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) &= \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \\ \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) \end{array} \right\}_\mathrm{A} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R}) \end{array} \right\}_\mathrm{A} \\ &= \left\{ \mathcal{V}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \right\}_\mathrm{A} \cdot \left\{ \mathcal{C}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \right\}_\mathrm{A}. \end{aligned}$$

Théorème

L'énergie cinétique d'un solide est le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique (pris au même point).

Nous allons évidemment retrouver des cas particuliers de point fixe ou de calcul au centre de masse.

1. Cas d'un point A fixe dans le repère R.

$$2\mathrm{T}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) = \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \cdot \underline{\underline{J}}(\mathrm{A},\ \mathrm{S}) \cdot \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}).$$

2. Cas du point A confondu avec C.

$$2\mathrm{T}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) = \mathrm{M}_S(\mathbf{V}(\mathrm{C}, \mathrm{S}/\mathrm{R}))^2 + \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) \cdot \underline{\underline{J}}(\mathrm{C},\ \mathrm{S}) \cdot \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R}).$$

3.9 Torseur dynamique

On construit également le torseur dynamique d'un solide S, de masse $\mathrm{M_S}$ et de centre de masse C, dans son mouvement par rapport à un repère R de la manière suivante :

$$\left\{\ \mathcal{D}(S/\mathrm{R})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{\forall \mathrm{M}\in \mathrm{S}} \mathbf{\Gamma}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\,\mathrm{d}m \\ \displaystyle\int_{\forall \mathrm{M}\in \mathrm{S}} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{\Gamma}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\,\mathrm{d}m \end{array} \right\}_{\mathrm{A}}$$

3.9.1 Résultante du torseur dynamique

La résultante du torseur cinétique s'écrit :

$$\mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R}) = \int_{\forall \mathrm{M}\in \mathrm{S}} \mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\,\mathrm{d}m = M_{\mathrm{S}}\mathbf{V}(\mathrm{C}/\mathrm{R}).$$

Pour un système à masse conservative, on en déduit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \int_{\forall \mathrm{M}\in \mathrm{S}} \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} \mathrm{d}m = \mathrm{M_S}\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(\mathrm{C}/\mathrm{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

La résultante du torseur dynamique est donc la dérivée par rapport au temps de la résultante du torseur cinétique :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(\mathrm{S}/\mathrm{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \int_{\forall \mathrm{M}\in \mathrm{S}} \mathbf{\Gamma}(\mathrm{M}/\mathrm{R})\,\mathrm{d}m = \mathrm{M_S}\mathbf{\Gamma}(\mathrm{C}/\mathrm{R}).$$

3.9.2 Moment dynamique

Le moment cinétique du solide S s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S/R}) = \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M/R})\, \mathrm{d}m.$$

Pour un système à masse conservative, on en déduit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S/R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \left.\frac{\mathrm{d}\big(\mathbf{AM} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M/R})\big)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} \mathrm{d}m.$$

Soit en développant :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S/R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \big(\mathbf{V}(\mathrm{M/R}) - \mathbf{V}(\mathrm{A/R})\big) \wedge \mathbf{V}(\mathrm{M/R})\, \mathrm{d}m + \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{AM} \wedge \boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{M/R})\, \mathrm{d}m,$$

ou encore :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S/R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = -\mathbf{V}(\mathrm{A/R}) \wedge \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{V}(\mathrm{M/R})\, \mathrm{d}m + \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{AM} \wedge \boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{M/R})\, \mathrm{d}m.$$

Le moment dynamique $\int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}} \mathbf{AM} \wedge \boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{M/R})\, \mathrm{d}m$, noté $\boldsymbol{\delta}(\mathrm{A}, \mathrm{S/R})$, peut donc s'exprimer de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\delta}(\mathrm{A}, \mathrm{S/R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S/R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + \mathrm{M_S}\mathbf{V}(\mathrm{A/R}) \wedge \mathbf{V}(\mathrm{C/R}).$$

Nous allons évidemment retrouver des cas particuliers de point fixe ou de calcul au centre de masse.

1. Cas d'un point A fixe dans le repère R.

$$\boldsymbol{\delta}(\mathrm{A}, \mathrm{S/R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A}, \mathrm{S/R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\underline{\underline{J}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S/R}))}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

2. Cas du point A confondu avec C.

$$\boldsymbol{\delta}(\mathrm{C}, S/\mathrm{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{C}, \mathrm{S/R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\underline{\underline{J}}(\mathrm{C}, \mathrm{S}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S/R}))}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

Comme pour les autres quantités dépendant de la masse, le torseur dynamique peut être écrit de manière condensée au centre de masse :

$$\{\ \mathcal{D}(\mathrm{S/R})\ \} = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{M_S}\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{C/R}) \\ \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\big(\underline{\underline{J}}(\mathrm{C}, \mathrm{S}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S/R})\big)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} \end{array} \right\}_{\mathrm{A}}$$

EXEMPLE

1. Matrice d'inertie en O d'un disque D de rayon R, de centre O et de masse m. Supposons le disque d'épaisseur e, négligeable devant son rayon R et de masse volumique ϱ. Par symétrie, les produits d'inertie sont nuls. Il reste alors :

$$[J(\mathrm{O},\mathrm{D})] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}_r,\,\mathbf{e}_\theta,\,\mathbf{e}_z)} .$$

avec $C = \varrho e \int_D r^2 r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = m\dfrac{R^2}{2}$

et $A = B = \varrho e \int_D r^2 \cos\theta r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = m\dfrac{R^2}{2} \underbrace{\int_D \cos^2\theta \mathrm{d}\theta}_{\pi} \underbrace{\int_D r^3 \mathrm{d}r}_{R^4/4} = m\dfrac{R^2}{4}.$

2. Opérateur d'inertie en O d'une sphère creuse S de centre O, de rayon R et de masse m

$$[J(\mathrm{O},\mathrm{S})] = \frac{2}{3}mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(.,\,.,\,.)} .$$

3. Opérateur d'inertie en O d'une sphère pleine S de centre O, de rayon R et de masse m

$$[J(\mathrm{O},\mathrm{S})] = \frac{2}{5}mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(.,\,.,\,.)} .$$

Exercices

3.1 Moment d'inertie d'une tige

On considère une tige mince T = AB, homogène, de longueur 2ℓ de masse m.

1) Par intégration, calculer le moment d'inertie de T par rapport à un axe $(\mathrm{A}, \mathbf{u})$ passant par une de ses extrémités et perpendiculaire à sa direction.

2) En utilisant le théorème d'Huygens, en déduire le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le milieu de la tige.

3) Retrouver ce résultat à partir du résultat de la question 1, mais cette fois sans utiliser le théorème d'Huygens ni l'intégration.

3.2 Centre de masse et matrice d'inertie d'un cône

On considère un cône plein (figure 3.7), homogène, de masse volumique ρ, de hauteur h et de rayon maximal R.

1) Calculer la masse m du cône en fonction de ρ, h et R.

2) Déterminer la position du centre de masse.

3) Calculer la matrice d'inertie du cône à son sommet.

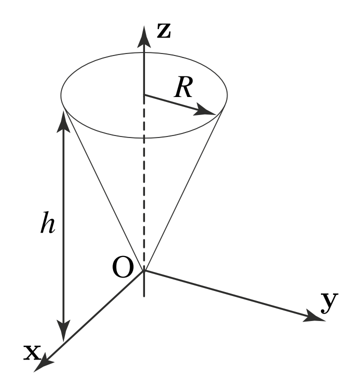


Figure 3.7 **Cône de révolution.**

3.3 Centre de masse et matrice d'inertie d'une demi-sphère

On considère une demi-sphère S de masse m et de rayon R.

1) Calculer la matrice d'inertie de la demi-sphère en son centre O.

2) Déterminer la position du centre de masse C de S.

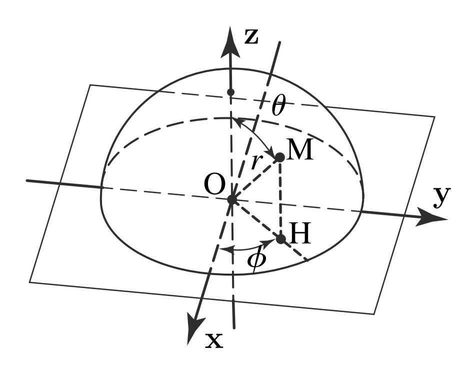


Figure 3.8 **Coordonnées sphériques. L'angle θ correspond à la longitude et ϕ à la latitude en repérage terrestre.**

3) Exprimer la matrice d'inertie en C. Utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ). Avec les conventions de la figure 3.8, on les définit comme suit :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi, \\ y = r \sin\theta \sin\phi, \\ z = r \cos\theta. \end{cases}$$

L'élément de surface sur la sphère de rayon R est $\mathrm{d}A = R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$.

3.4 Anémomètre à coupelles

Un anémomètre à coupelles est un appareil utilisé pour mesurer la vitesse du vent. Il est constitué de quatre coupelles S_i, de centre respectifs O_i ayant la forme de demi-sphères creuses comme le montre la figure 3.9. Les coupelles sont homogènes, de masse m et de rayon R. Leurs centres sont situés à la distance b de l'axe de rotation $(O, \mathbf{z})$. On néglige l'inertie des tiges assurant la liaison entre les coupelles.

1) Soit R= $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ un repère lié à l'anémomètre S. Calculer le moment d'inertie de S par rapport à $(O, \mathbf{z})$. On pourra commencer par déterminer le moment d'inertie d'une sphère creuse de centre O de rayon R de masse M par rapport à un axe quelconque passant par O.

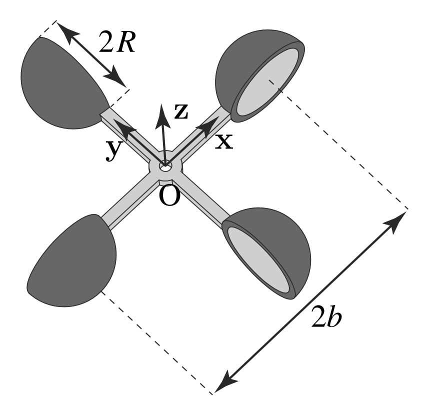


Figure 3.9 Anémomètre.

2) On suppose que l'anémomètre est en liaison pivot d'axe $(O, \mathbf{z})$ par rapport au bâti 0. On introduit $R_0 = (O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ un repère lié au bâti avec l'angle $\alpha = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y})$. Calculer le moment cinétique au point O de l'anémomètre dans son mouvement par rapport au bâti.

3.5 Mesure d'un moment d'inertie

La détermination du moment d'inertie d'un solide autour d'un axe n'est pas toujours possible par une méthode géométrique. Cette valeur peut être déterminée expérimentalement par une méthode dite des oscillations et de la surcharge inventée par Gauss.

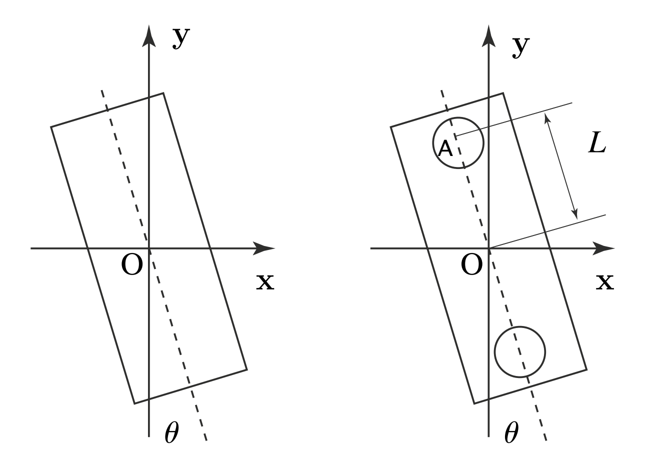


Figure 3.10 **Mesure d'un moment d'inertie par la méthode de Gauss.**

Un fil de torsion de constante C passant par l'axe de rotation (O, $\mathbf{z}$) est fixé au solide dont on veut déterminer le moment d'inertie. On fait osciller le pendule de torsion ainsi réalisé et ceci dans le plan (x, O, y). Soit I_1 le moment d'inertie cherché. Les frottements sont négligés. L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$I_1\ddot{\theta} + C\theta = 0.$$

On obtient donc un oscillateur harmonique dont on mesure la période d'oscillation T_1. On fixe ensuite symétriquement sur le solide étudié deux cylindres identiques de masse m et de rayon R à la distance L de l'axe de rotation. L'ensemble possède donc un moment d'inertie I_2 et une période d'oscillation T_2 que l'on mesure.

1) Exprimer les périodes d'oscillations T_1 et T_2 en fonction des données.

2) Retrouver l'expression du moment d'inertie d'un cylindre à base circulaire par rapport à son axe de révolution

3) Calculer le moment d'inertie I_2 de l'ensemble solide et cylindres par rapport à l'axe de rotation.

4) Écrire le rapport T_1/T_2 et en déduire la relation permettant de trouver I_1 en fonction de T_1, T_2 et des données m, R et L. Conclure sur l'influence relative de R par rapport à L.

Solutions des exercices

3.1 Tige

1) Les résultats peuvent être obtenus à partir de l'exemple traitant le torseur cinétique d'une tige.
2) On peut considérer deux tiges de longueur ℓ et utiliser la question **1)** et l'additivité du moment d'inertie.

3.2 Cône

1) On pose $R(z) = Rz/h$. On peut alors paramétrer le cône en coordonnées cylindriques par $0 \leqslant z \leqslant h$ et $0 \leqslant r \leqslant R(z)$. Pour calculer le volume du cône, on peut remarquer qu'une portion de cône comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$ (très proches) peut-être assimilée à un cylindre de rayon $R(z)$ et de hauteur $\mathrm{d}z$. Le volume de ce cylindre élémentaire est ainsi $\pi R(z)^2\mathrm{d}z$. Par conséquent, on a :

$$V_{\text{cône}} = \int_0^h \pi R(z)^2 \mathrm{d}z = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi R^2 h}{3},$$

d'où l'on tire la masse du cône $m = \dfrac{\rho}{3}\pi R^2 h$.

2) Le même découpage donne pour le centre de masse :

$$\mathrm{OC} = \frac{1}{m} \int_0^h z\rho\pi R(z)^2 \mathrm{d}z = \frac{3}{h^3} \int_0^h z^3 \mathrm{d}z = \frac{3h}{4}.$$

On trouve donc que le centre de masse ne dépend pas du rayon du cône (noter que le centre de masse est plus près de la base que du sommet).

3) Pour des raisons de symétrie, la matrice d'inertie du cône est diagonale dans la base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ (voir Figure 3.7) et $I_{(\mathrm{O},\,\mathbf{x})} = I_{(\mathrm{O},\,\mathbf{y})}$. Nous allons reprendre les formules d'intégrations en coordonnées cylindriques utilisées dans ce chapitre. Les intégrations par rapport à θ sont identiques à celles déjà traitées pour le cylindre. On trouve ainsi :

$$[J(\mathrm{O}, \text{cône})]_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \rho\pi \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{R(z)} r \begin{pmatrix} 2z^2 + r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + 2z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}r.$$

Attention : l'intégrale sur r doit être calculée en premier puisque $R(z)$ est une fonction de z. Il vient :

$$[J(\mathrm{O}, \text{cône})]_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \rho\pi \int_0^h \begin{pmatrix} z^2R(z)^2 + R(z)^4/4 & 0 & 0 \\ 0 & R(z)^4/4 + z^2R(z)^2 & 0 \\ 0 & 0 & R(z)^4/2 \end{pmatrix} \mathrm{d}z.$$

Les intégrations restantes ne posent pas de difficultés :

$$\frac{1}{2}\int_0^h R(z)^4 \mathrm{d}z = \frac{R^4}{2h^4}\int_0^h z^4 \mathrm{d}z = \frac{R^4 h}{10}.$$

$$\int_0^h (z^2 R(z)^2 + R(z)^4/4)\mathrm{d}z = \frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^4 \mathrm{d}z + \frac{1}{2}\frac{R^4 h}{10} = \frac{R^2 h^3}{5} + \frac{R^4 h}{20}$$
$$= \frac{R^2 h}{5}\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right).$$

En remplaçant, on obtient finalement :

$$[J(\mathrm{O}, \text{cône})] = \frac{3}{20} m \begin{pmatrix} R^2 + 4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + 4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}.$$

3.3 Demi-sphère

1) L'axe (O, z) est un axe de révolution de la demi-sphère. La matrice d'inertie dans la base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ s'écrit donc :

$$[J(\mathrm{O}, \mathrm{S})]_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I' \end{pmatrix}.$$

La masse surfacique de la demi-sphère est $m/A(\mathrm{S})$ où $A(\mathrm{S}) = 2\pi R^2$ désigne sa surface. En passant en coordonnées sphériques, l'intégrale permettant de calculer I' se met sous la forme :

$$I' = \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \boldsymbol{\sigma} R^2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\phi.$$

Le calcul est laissé au lecteur. On a vu dans le chapitre que le résultat est $I' = 2/3\, mR^2$. Le calcul de I peut se faire en effectuant l'intégration en coordonnées sphériques. Nous allons contourner ce calcul en utilisant le moment d'inertie par rapport au point O. On obtient sa valeur facilement :

$$I_{\mathrm{O}} = \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} \mathrm{OM}^2 \mathrm{d}m = R^2 \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} \mathrm{d}m = mR^2.$$

En se rappelant la relation $I_{\mathrm{O}} = (I_{(\mathrm{O},\mathbf{x})} + I_{(\mathrm{O},\mathbf{y})} + I_{(\mathrm{O},\mathbf{z})})/2 = I + I'/2$, on trouve $I = 3/2\, mR^2$. On a donc :

$$[J(\mathrm{O}, \mathrm{S})] = \begin{pmatrix} 3/2\, mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2\, mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2\, mR^2 \end{pmatrix}_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})},$$

ce qui montre que le système est sphérique en O. On ne pouvait *a priori* pas prédire cette propriété par des arguments de symétries.

2) En raison de la symétrie de révolution, le centre de masse se trouve sur l'axe $(\mathrm{O}, \mathbf{z})$. Par définition, on a de plus :

$$\mathbf{OC} = \frac{\mathbf{z}}{m}\int_{\mathrm{M}\in\mathrm{S}} z\,\mathrm{d}m = \frac{\mathbf{z}}{2\pi R^2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}(R\cos\theta)R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi.$$

L'intégration sur ϕ est immédiate. Le produit $\sin\theta\cos\theta$ ayant pour primitive $-\cos(2\theta)/4$, on obtient finalement :

$$\mathbf{OC} = \mathbf{z}R\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{R}{2}\mathbf{z}.$$

3) Afin d'exprimer la matrice d'inertie au centre de masse, on va utiliser le théorème d'Huygens-Steiner. D'après la question précédente, ce dernier permet d'écrire :

$$[J(\mathrm{O},\mathrm{S})]_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = [J(\mathrm{C},\mathrm{S})] + m\begin{pmatrix} R^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & R^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} ;$$

on trouve donc :

$$[J(\mathrm{C},\mathrm{S})]_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \frac{2mR^2}{3}\begin{pmatrix} 5/8 & 0 & 0 \\ 0 & 5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} .$$

3.4 Anémomètre à coupelles

1) Nous allons déterminer la matrice d'inertie de l'anémomètre (qui n'est pas demandée dans l'énoncé). Appellons $\mathrm{C_i}$ le centre de masse de la coupelle $\mathrm{S_i}$ et notons $\mathrm{B} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. D'après l'exercice précédent, on a :

$$[J(\mathrm{O_i},\mathrm{S_i})]_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3/2\,mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2\,mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2\,mR^2 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{O_1C_1} = (R/2)\,\mathbf{y} \qquad \mathbf{O_2C_2} = -(R/2)\,\mathbf{x}$$
$$\mathbf{O_3C_3} = -(R/2)\,\mathbf{y} \qquad \mathbf{O_4C_4} = (R/2)\,\mathbf{x}.$$

À l'aide du théorème d'Huygens-Steiner, on obtient la matrice d'inertie des $\mathrm{S_i}$ calculée en leur centre de masse respectifs :

$$[J(\mathrm{C_1},\mathrm{S_1})]_\mathrm{B} = [J(\mathrm{C_3},\mathrm{S_3})]_\mathrm{B} = \frac{2mR^2}{3}\begin{pmatrix} 5/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/8 \end{pmatrix}_\mathrm{B} .$$

de même que :

$$[J(\mathrm{C_2}, \mathrm{S_2})]_\mathrm{B} = [J(\mathrm{C_4}, \mathrm{S_4})]_\mathrm{B} = \frac{2mR^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 5/8 \end{pmatrix}_\mathrm{B} .$$

Il s'agit maintenant de calculer la matrice d'inertie au centre O de l'anémomètre. Ici encore, c'est le théorème de Huygens-Steiner qu'il convient d'utiliser.Considérons d'abord la coupelle $\mathrm{S_1}$. On a $\mathbf{OC}_1 = b\,\mathbf{x} + R/2\,\mathbf{y}$ (voir Figure 3.9). D'où l'on tire :

$$\begin{aligned}[J(\mathrm{O}, \mathrm{S_1})]_\mathrm{B} &= [J(\mathrm{C_1}, \mathrm{S_1})]_\mathrm{B} + m \begin{pmatrix} R^2/4 & -bR/2 & 0 \\ -bR/2 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + R^2/4 \end{pmatrix} \\ &= mR^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -\beta/2 & 0 \\ -\beta/2 & 2/3 + \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 + \beta^2 \end{pmatrix}_\mathrm{B} ;\end{aligned}$$

où l'on a posé $\beta = b/R > 1$. Le même raisonnement permet d'obtenir la matrice des coupelles restantes. On trouve :

$$[J(\mathrm{O}, \mathrm{S_3})]_\mathrm{B} = mR^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -\beta/2 & 0 \\ -\beta/2 & 2/3 + \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 + \beta^2 \end{pmatrix}_\mathrm{B} ,$$

et

$$[J(\mathrm{O}, \mathrm{S_2})]_\mathrm{B} = [J(\mathrm{O}, \mathrm{S_4})]_\mathrm{B} = mR^2 \begin{pmatrix} 2/3 & \beta/2 & 0 \\ \beta/2 & 2/3 + \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 + \beta^2 \end{pmatrix}_\mathrm{B} .$$

Pour conclure, il reste à additionner les contributions de chacune des coupelles :

$$\begin{aligned}[J(\mathrm{O}, \mathrm{S})]_\mathrm{B} &= \sum_{i=1}^{4} [J(\mathrm{O}, \mathrm{S_i})]_\mathrm{B} \\ &= 2mR^2 \begin{pmatrix} 4/3 + \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 + \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 + 2\beta^2 \end{pmatrix}_\mathrm{B} .\end{aligned}$$

L'anémomètre est donc un système cylindrique d'axe $(\mathrm{O}, \mathbf{z})$ tel que $I_{(\mathrm{O},\mathbf{z})} > I_{(\mathrm{O},\mathbf{x})}$.

2) On a pour le moment cinétique en O :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{O} \in \mathrm{S}/\mathrm{R_0}) = \underline{\underline{J}}(\mathrm{O}, \mathrm{S})\big[\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_0})\big] .$$

où $\mathbf{\Omega}(S/R_0)$ est le vecteur vitesse de rotation de l'anémomètre par rapport au bâti. L'anémomètre étant en liaison pivot avec le bâti en O, on a, avec les notations de l'énoncé, $\mathbf{\Omega}(S/R_0) = \dot{\alpha}\mathbf{z}$. Par conséquent, on a :

$$\boldsymbol{\sigma}(O \in S/R_0) = m\dot{\alpha}(8/3R^2 + 4b^2)\mathbf{z}.$$

3.5 Mesure d'un moment d'inertie

1) On a pour ce système oscillant simple $T_1 = 2\pi\sqrt{(I_1/C)}$ et $T_2 = 2\pi\sqrt{(I_2/C)}$.
2) Le moment d'inertie de chaque cylindre est $I_c = 1/2mR^2$.
3) Le moment d'inertie de l'ensemble solide et cylindre est donné simplement par

$$I_2 = I_1 + 2mL^2 + 2I_c = I_1 + 2mL^2 + mR^2.$$

4) On en déduit donc $(T_1/T_2)^2 = I_2/I_1$ ce qui donne

$$I_1 = (2L^2 + R^2)\frac{mT_1^2}{T_2^2 - T_1^2},$$

avec le terme R^2 qui est en général négligeable devant L^2.

Partie II

Action – Liaisons – Statique

ACTIONS, LIAISONS 4

Nous débuterons par la notion élémentaire d'action mécanique ; nous poursuivrons par la modélisation, *par le torseur statique*, des actions mécaniques s'exerçant entre des solides indéformables et des actions mécaniques de liaisons.

4.1 ACTION MÉCANIQUE

4.1.1 Définitions

a) Interaction

Deux solides S_1 et S_2 sont dits en interaction si une modification de position de l'un entraîne une modification de position de l'autre.

b) Action mécanique

On dit que S_2 exerce une action mécanique sur S_1 si relativement à un référentiel donné les mouvements (ou déformations) de S_1 par rapport à ce référentiel dépendent de la présence de S_2. D'une façon générale, on appelle action mécanique, toute cause physique susceptible de maintenir ou de modifier les mouvements d'un corps ou de déformer un corps. On peut par exemple recenser : le pied d'un footballeur qui frappe un ballon, les champs électriques et magnétiques qui dévient l'électron, le rotor qui entraîne l'axe d'une turbine. Ces quelques exemples illustrent les deux grandes catégories d'actions mécaniques :

- les actions à distance liées à des champs de force (ex : champ d'accélération de la pesanteur ou champ électromagnétique) ;
- les actions de contact (ex : action de la main sur la poignée d'une porte, pression de l'eau sur un plongeur).

Ces actions s'exercent soit sur une surface (ex : contact entre deux solides), soit sur un volume (ex : la pesanteur).
Quatre actions élémentaires sont responsables de tous les phénomènes physiques observés dans l'univers, chacune se manifestant par une force dite force fondamentale. Ce sont l'interaction nucléaire forte, l'interaction nucléaire faible, l'interaction électromagnétique et la gravitation. Les deux premières ont un rayon d'action comparable aux dimensions atomiques. Les deux dernières ont un rayon d'action beaucoup plus grand et se manifestent sous la forme d'actions à distance. Aux échelles microscopiques, la gravitation est la plus faible des quatre interactions fondamentales de la physique ; elle devient dominante au fur et à mesure que les échelles de distance augmentent.

Une notion importante est celle d'actions mécaniques internes ou externes. Cette notion dépend du système considéré. Pour cela, on isole le système : on identifie le solide S ou l'ensemble de solides constituant l'objet de l'étude ce qui définit un domaine intérieur (ce qui se passe à l'intérieur du solide S ou du système) et un domaine extérieur, noté $\bar{\mathrm{S}}$, à l'origine de l'ensemble des actions mécaniques exercées à distance ou par des solides ne faisant pas partie du système.

4.1.2 Modélisation des actions mécaniques

La modélisation d'une action mécanique requiert généralement la précision :

- de la cause de l'action (ex : un élément de matière dP_2 d'un solide S_2) ;
- de la nature de l'action (ex : champ électromagnétique, action de contact) ;
- du point d'application P de l'action mécanique ;
- de l'élément de matière qui subit l'action (ex : l'élément de matière dP_1 du solide S_1).

Si on considère le solide S_1 comme un ensemble de points matériels (c'est-à-dire de points P_1 auxquels on attache une petite quantité de matière dP_1), l'action mécanique exercée sur le solide S_1 par l'extérieur $\bar{\mathrm{S}}_1$ à ce solide pourra se calculer comme l'intégrale sur l'ensemble des éléments S_1 des actions exercées par l'intégrale des éléments de $\bar{\mathrm{S}}_1$. S'il s'agit d'actions à distance (attraction gravitationnelle, par exemple), l'intégrale est une intégrale volumique. S'il s'agit d'actions de contact, l'intégrale est alors une intégrale de surface.

a) Interaction gravitationnelle

La gravitation est le phénomène d'interaction physique à l'origine de l'attraction réciproque des masses. La force gravitationnelle (ou loi de Newton) exercée par le point matériel P_1 de masse m_1 sur le point matériel P_2 de masse m_2 s'écrit :

$$\Psi_{\mathbf{g}}(\mathrm{P}_1 \rightarrow \mathrm{P}_2) = -\mathcal{G}_0 m_1 m_2 \frac{\mathbf{P_1P_2}}{\|\mathbf{P_1P_2}\|^3},$$

où $\mathcal{G}_0$ est la constante de gravitation universelle qui vaut $6,6742 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1}s^{-2}. La loi de Galilée (accélération de la pesanteur g) se retrouve à partir de la loi de Newton. En prenant, en première approximation, $\|\mathbf{P_1P_2}\|$ égal au rayon terrestre et m_1 égale à la masse de la Terre, on en déduit : $g = \mathcal{G}_0 \dfrac{m_1}{\|\mathbf{P_1P_2}\|^2} = 9,81$ m s^{-2} soit :

$$\Psi_{\mathbf{g}}(\text{Terre} \rightarrow \mathrm{P}_2) = -m_2 \mathrm{g}\mathbf{z},$$

où $\mathbf{z}$ est un vecteur unitaire normal à la surface de la terre au point P_2 et dirigé vers l'extérieur de la Terre.

b) Interaction électromagnétique

La force électromagnétique, ou force de Lorentz, exercée par un point P_2, de charge électrique q_2, en mouvement à la vitesse $\mathbf{V}(P_2/R)$, sur un point P_1, de charge électrique q_1, en mouvement à la vitesse $\mathbf{V}(P_1/R)$, s'écrit :

$$\Psi_{\mathbf{L}}(P_1 \to P_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{P_1P_2}}{\|\mathbf{P_1P_2}\|^3} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\mu_0}\mathbf{V}(P_1/R) \wedge \left(\mathbf{V}(P_2/R) \wedge \frac{\mathbf{P_1P_2}}{\|\mathbf{P_1P_2}\|^3}\right),$$

où ϵ_0 est une constante universelle appelée la permittivité du vide (à remplacer par la permittivité du milieu, lorsqu'on n'est pas dans le vide) et qui vaut $\epsilon_0 = 8,854187 \times 10^{-12}$ A s V^{-1} m^{-1} et où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide qui vaut $4\pi\ 10^{-7}$ m kg C^{-2}.

c) Force et Moment

Un vecteur lié est un vecteur attaché à un point P de l'espace. On appelle *force* la grandeur vectorielle décrivant une interaction capable de produire un mouvement ou de créer une déformation. Une force se représente par un vecteur lié $\Psi(. \to P)$, le point P étant le point d'application de la force. On appelle *moment* d'une force $\Psi(. \to P)$ appliquée en P par rapport à un point A, la grandeur vectorielle $\mathbf{M}(A, \Psi) = \mathbf{AP} \wedge \Psi(. \to P)$. Un moment se représente par un vecteur lié au point A, point d'expression du moment.

Remarque

Du point de vue de la modélisation des actions mécaniques,

- une force est généralement associée à une action susceptible de créer un mouvement de translation ;
- un moment est généralement associé à une action susceptible de créer un mouvement de rotation.

d) Torseur des actions mécaniques

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, un torseur est composé de deux quantités vectorielles : la résultante et le moment. Pour le torseur statique (également appelé torseur des actions mécaniques ou torseur des efforts transmissibles) :

- la résultante est la somme de toutes les forces élémentaires $d\Psi(\text{ext} \to P)$ s'exerçant sur les points $P \in S$:

$$\mathbf{F}(\text{ext} \to S) = \int_{\forall P \in S} d\Psi(\text{ext} \to P)\,;$$

- le moment en un point A quelconque est la somme de tous les moments élémentaires engendrés par $d\Psi(\text{ext} \to P)$:

$$\mathbf{M}(A, \mathbf{F}(\text{ext} \to S)) = \int_{\forall P \in S} \mathbf{AP} \wedge d\Psi(\text{ext} \to P) \quad \forall A.$$

DÉMONSTRATION. Si on admet que $\mathbf{F}(\text{ext} \rightarrow \text{S})$ représente bien la résultante des actions élémentaires extérieures exercées sur les points P du solide S, $\mathrm{d}\Psi(\text{ext} \rightarrow P)$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\text{B}, \mathbf{F}(\text{ext} \rightarrow \text{S})) &= \int_{\forall \text{P} \in \text{S}} \mathbf{BM} \wedge \mathrm{d}\Psi(\text{ext} \rightarrow \text{P}) \\
&= \int_{\forall \text{P} \in \text{S}} (\mathbf{BA} + \mathbf{AP}) \wedge \mathrm{d}\Psi(\text{ext} \rightarrow \text{P}) \\
&= \int_{\forall \text{P} \in \text{S}} \mathbf{BA} \wedge \mathrm{d}\Psi(\text{ext} \rightarrow \text{P}) \\
&+ \int_{\forall \text{P} \in \text{S}} \mathbf{AP} \wedge \mathrm{d}\Psi(\text{ext} \rightarrow \text{P}) \\
&= \mathbf{BA} \wedge \mathbf{F}(\text{ext} \rightarrow \text{S}) + \mathbf{M}(\text{A}, \mathbf{F}(\text{ext} \rightarrow \text{P})).
\end{aligned}$$

On montre ainsi que le moment d'une force obéit bien à la formule de changement de point du champ des moments d'un torseur. □

4.1.3 Action mécanique de contact

Le deuxième type d'action mécanique est l'action de contact entre deux solides qui se touchent. La modélisation de ces actions est complexe car elles dépendent de la structure microscopique des surfaces en contact. La répartition de ces actions de contact peut être ponctuelle, linéique ou surfacique et nécessite souvent le recours à des méthodes statistiques pour représenter l'effet global des actions locales. Nous allons cependant évoquer ici deux cas particuliers pour lesquels des lois expérimentales ont pu être établies :

- contact parfait (sans frottement) ;
- loi de frottement de glissement (loi d'Amontons-Coulomb).

Le contact entre deux solides S_1 et S_2 s'effectue selon une surface élémentaire notée dS (cette surface peut être réduite à une ligne ou un point). On sait que les efforts élémentaires exercés par S_2 sur S_1 appliqués en un point M sont représentés par un vecteur $\mathrm{d}\mathbf{F}(S_2 \rightarrow \text{M})$ attaché au point M. Le rapport entre l'effort élémentaire et l'élément de surface est une densité surfacique d'effort (homogène à une pression exprimée en $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$). Cependant, dans la plupart des cas, il est impossible de connaître la valeur de ces actions en tout point M de la surface de contact dS. On doit alors faire des hypothèses.

a) Cas du contact dit parfait (sans frottement)

On assimile, dans ce cas, le contact entre les deux solides S_1 et S_2 à celui exercé par un fluide parfait sur un solide : dans ce cas les forces de contact sont dirigées selon la normale $\mathbf{n}$ en M à la surface de contact dS.

Remarque

Dans le cas d'un contact ponctuel entre les solides S_1 et S_2, la force de contact est dirigée selon la normale au plan tangent aux surfaces en contact.

Exemple

1. Soit un solide S_2 qui exerce sur S_1 une charge linéique P (N/m) constante le long d'une ligne de contact ($P = \mathrm{d}||\mathbf{F}||/\mathrm{d}\ell$), dirigée selon $\mathbf{z}$. La résultante $\mathbf{F}$ du torseur des actions mécaniques de S_2 sur S_1 s'écrit : $\mathbf{F} = \int_0^L \mathrm{d}\mathbf{F} = \int_0^L P\mathrm{d}\ell\mathbf{z} = PL\mathbf{z}$.
2. On suppose à présent que la charge P varie linéairement le long de la ligne de contact ($P(\ell) = \alpha\ell + P_0$) dirigée selon $\mathbf{z}$. La force de contact $\mathbf{F}$ s'exprime alors : $\mathbf{F} = \int_0^L \mathrm{d}\mathbf{F} = \int_0^L P(\ell)\mathrm{d}\ell\mathbf{z} = \left(\alpha L^2 + P_0 L\right)\mathbf{z}$.

Remarque

On constate que dès que les actions locales de contact sont connues avec précision, on peut déterminer le torseur des actions de contact.

b) Cas du contact avec frottement

Dans ce cas nous allons supposer que la force $\mathrm{d}\mathbf{F}(S_2 \rightarrow M)$ est constituée de deux composantes : l'une dirigée suivant la normale $\mathbf{n}$ en M à la surface de contact $\mathrm{d}S$ et une composante appartenant au plan tangent en M à cette surface de contact. On note $\mathrm{d}\mathbf{F}_n$ la force normale exercée par S_2 en M et $p_n = \mathrm{d}F_n/\mathrm{d}S$ la pression correspondante où $\mathrm{d}F_n = \|\mathrm{d}\mathbf{F}_n\|$. On note $\mathrm{d}\mathbf{F}_t$ la force tangentielle exercée par S_2 en M et $\tau = \mathrm{d}F_t/\mathrm{d}S$ la pression (dite de cisaillement) correspondante où $\mathrm{d}F_t = \|\mathrm{d}\mathbf{F}_t\|$.

• *Le frottement sec et les lois d'Amontons*

Leonardo da Vinci (1452-1519) peut être considéré comme le père de la tribologie moderne. Cent cinquante ans avant que les lois de frottement d'Amontons soient introduites, il les avait déjà répertoriées dans ses manuscrits. Dissimulés ou égarés pendant des siècles, les manuscrits de Leonardo da Vinci furent lus en Espagne 250 ans plus tard. En statique, les lois d'Amontons (1663, 1705), physicien français, furent publiées au XVIIe siècle. Ces lois expriment une relation entre les actions normales et tangentielles dues à l'interaction de deux solides en contact :

- 1re loi d'Amontons : la force de frottement $F = \|\mathbf{F}\|$ est directement proportionnelle au chargement appliqué $P = \|\mathbf{P}\|$;
- 2e loi d'Amontons : la force de frottement F ne dépend pas de l'étendue des surfaces de contact, mais seulement de la nature de ces surfaces.

1[er] Cas. On va considérer le premier cas d'un glissement relatif ($\mathbf{V}_g \neq \mathbf{0}$). Dans ce cas la force $d\mathbf{f}_t$ est opposée au vecteur glissement relatif et est proportionnelle au vecteur $d\mathbf{f}_n$. Ceci s'écrit :

$$\begin{cases} d\mathbf{f}_t(\mathrm{P},\, \mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1) \cdot \mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{S}_1) & \leqslant & 0, \\ d\mathbf{f}_t(\mathrm{P},\, \mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1) \wedge \mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{S}_1) & = & \mathbf{0}, \\ d\mathbf{f}_t(\mathrm{P},\, \mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1) & = & f\, d\mathbf{f}_n(\mathrm{P},\, \mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1). \end{cases}$$

La première inégalité exprime le fait que les actions de contact tangentielles s'opposent au glissement relatif, la seconde qu'elles sont colinéaires et la troisième que ces actions tangentielles sont proportionnelles - en cas de glissement - aux actions normales. Le scalaire $\mathbf{f}$ est appelé coefficient de frottement. Il est caractéristique du contact entre les deux solides (matériaux respectifs, type de surface).
La constante $\mathbf{f}$ est le coefficient de frottement. Sa valeur est de l'ordre de 0,5 pour du bois sur du bois, de 1 pour une semelle de chausson d'escalade en caoutchouc sur un rocher.

Tableau 4.1 Valeurs indicatives des coefficients d'adhérence f_s et de frottement f avec et sans lubrification. Le coefficient f_s correspond en fait à la valeur de f au démarrage du mouvement.

Nature des matériaux	f_s sans	f_s avec	f sans	$\times$ avec
Acier sur acier	0,18	0,12	0,15	0,09
Acier sur fonte	0,19	0,1	0,16	0,08 à 0,04
Acier sur bronze	0,11	0,1	0,1	0,09
Téflon sur acier	0,04		0,04	
Fonte sur bronze		0,1	0,2	0,08 à 0,04
Nylon sur acier			0,35	0,12
Bois sur bois	0,65	0,2	0,4 à 0,2	0,16 à 0,04
Métaux sur bois	0,6 à 0,5 0	1	0,5 à 0,2	0,08 à 0,02
Métal sur glace			0,02	
Pneu voiture sur route	0,8		0,6	0,3 à 0,1

2[e] Cas. On va considérer le cas d'un glissement relatif nul ($\mathbf{V}_g = \mathbf{0}$). Dans ce cas la force $d\mathbf{f}_t$ est telle que :

$$d\mathbf{f}_t(\mathrm{P},\, S_2 \to \mathrm{S}_1) \leqslant f\, d\mathbf{f}_n(\mathrm{P},\, S_2 \to S_1).$$

On ne peut plus utiliser de vitesse de glissement. On exprime simplement qu'en statique (plus de mouvement relatif) les actions de contact tangentielles sont inférieures (en intensité) au cas limite donné par l'existence d'un glissement.

Remarque

Si on suppose que la vitesse de glissement peut être quelconque dans le plan tangent alors on définit le cône de frottement par $f = \tan \varphi$ tel que dans le cas de glissement relatif les actions tangentielles se situent sur le cône.

Remarque
Le cas d'un contact parfait correspond à un coefficient de frottement nul.

Ces deux lois seront rendues célèbres par Charles de Coulomb (1726, 1805) à la suite d'une série d'expériences « *réelles et faites en (vraie) grandeur* ». Pendant des mois, il étudie le comportement des cordes dans les poulies, les grues et les cabestans ; il compare cordes neuves et usagées, sèches ou imbibées d'eau salée ; enfin il fait frotter des plateaux de bois sec ou huilé, de métal et autres substances les uns contre les autres. Ces résultats expérimentaux seront regroupés dans sa *Théorie des machines simples*. Coulomb souligne en préambule de son ouvrage que ces lois avaient déjà été exprimées par Guillaume Amontons dans son mémoire *De la résistance causée dans les machines* en 1699. Mais ces lois d'Amontons avaient été contestées par la suite. Coulomb fait plus que les confirmer. Il en étend le domaine de validité, en particulier pour de très fortes charges. La diversité des paramètres dont il étudie l'influence, son utilisation systématique de l'analyse mathématique sont sans précédent au XVIIIe siècle .

c) Coefficient de frottement statique et cône de frottement statique

Considérons un solide S_1 en contact plan sur plan avec un solide S_2 et soumis à une force $\mathbf{F}$ dirigée selon $\mathbf{y}$ (figure 4.1). L'action du contact, noté $\mathbf{R}$, du solide S_2 sur le solide S_1 est une action de contact avec frottement et est supposée être dans le plan $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. $\mathbf{N}$ et $\mathbf{T}$ représentent sa projection respectivement sur $\mathbf{z}$, qui est la normale au point P représentant le contact, et sur $\mathbf{y}$. Il existe alors une relation reliant α et les composante de la réaction :

$$\tan \alpha = \frac{||\mathbf{N}||}{||\mathbf{T}||}.$$

On dit que $\mathbf{R}$ délimite un cône de frottement d'angle α autour de la normale $\mathbf{z}$ au point de contact P. Si l'intensité de la force $\mathbf{F}$ varie, l'intensité de la réaction varie aussi. L'angle α varie donc en fonction de la force $\mathbf{F}$ appliquée.

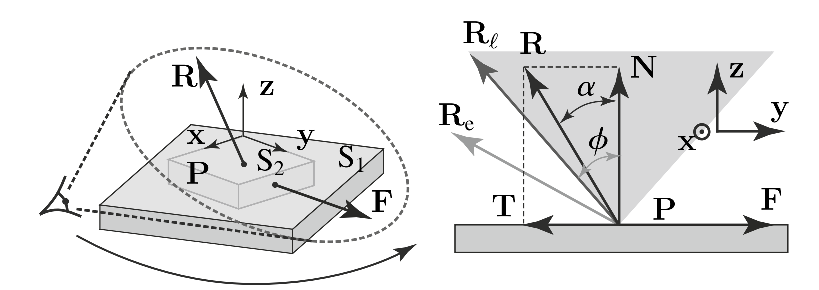


Figure 4.1 **Représentation du cône de frottement, délimité par l'angle ϕ issu du sommet P, pour le contact entre deux solide S_1 et S_2. $\mathbf{R_e}$ représente une réaction de S_2 sur S_1 garantissant l'équilibre de S_1. $\mathbf{R}_\ell$ représente la position d'équilibre limite de S_1.**

Le frottement présent entre les deux solides est appelé *frottement statique* et est représenté par un coefficient noté f. Ce coefficient représente la constante à partir de laquelle l'équilibre entre les solides S_1 et S_2 est rompu. En effet, à la limite de l'équilibre, on peut écrire :

$$f = \tan\phi = \frac{||\mathbf{N}_\ell||}{||\mathbf{T}_\ell||},$$

où $\mathbf{N}_\ell$ et $\mathbf{T}_\ell$ représentent les composantes, sur les axes de projection, de la réaction limite $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\ell$ avec $\phi = \alpha_\ell$. Le cône défini par l'angle au sommet ϕ est appelé *cône de frottement statique*. Il est lié au coefficient de frottement f et dépend notamment du poids de l'objet et de la nature des surfaces en contact.

À partir de la connaissance du cône de frottement, l'équilibre ou le glissement du solide S_1 par rapport au solide S_2 peuvent être définis.
Pour que l'équilibre statique soit réalisable, il faut que la réaction de S_2 sur S_1 projetée sur la direction de la force soit supérieure à la force appliquée. Autrement dit, la réaction de S_2 sur S_1 doit être située à l'extérieur du cône de frottement statique ($\mathbf{R} = \mathbf{R}_e$), ce qui revient à écrire :

$$\|\mathbf{T}\| > f\|\mathbf{N}\|.$$

Inversement, si la norme de la force appliquée est supérieur à la projection sur son axe de la réaction de S_2 sur S_1, le solide est animé d'un mouvement de translation. Il y a donc glissement de S_1 sur S_2, $\mathbf{R}$ est à l'intérieur du cône de frottement statique. Cette condition s'écrit :

$$\|\mathbf{T}\| < f\|\mathbf{N}\|.$$

L'équilibre limite est atteint pour $\|\mathbf{T}\| = f\|\mathbf{N}\|$, c'est-à-dire pour $\alpha = \phi$.

4.1.4 Cas du contact ponctuel réel

Dans de nombreux cas on a des contacts entre surfaces de type sphère plan, cylindre cylindre... et les contacts peuvent être assimilés à des contacts ponctuels (ils se limitent à de petites surfaces). Le torseur des actions de contact exercées par S_2 sur S_1 peut se décomposer en :

$$\begin{aligned}\left\{\ \mathcal{A}(S_2 \to S_1)\ \right\} &= \left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}(S_2 \to S_1)\\ \mathbf{M}(P,\ S_2 \to S_1)\end{array}\right\}_P \\ &= \left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_n(P,\ S_2 \to S_1) + \mathbf{F}_t(P,\ S_2 \to S_1)\\ \mathbf{M}_n(P,\ S_2 \to S_1) + \mathbf{M}_t(P,\ S_2 \to S_1)\end{array}\right\}_P\end{aligned}.$$

Les quantités $\mathbf{F}_n$ et $\mathbf{F}_t$ représentent les efforts normaux et tangentiels, alors que $\mathbf{M}_n$ et $\mathbf{M}_t$ représentent les moments dits de pivotement et de roulement. Les indices n et t se

réfèrent au vecteur normal $\mathbf{n}$ au plan tangent (de contact) et à un vecteur appartenant à ce plan $\mathbf{t}$
Les composantes normales et tangentielles de l'effort se calculent comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_n(P, S_2 \to S_1) &= (\mathbf{F}(S_2 \to S_1) \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}, \\ \mathbf{F}_t(P, S_2 \to S_1) &= -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{F}(S_2 \to S_1)) \end{cases}$$

Les moments dits de pivotement et de roulement se calculent comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_n(P, S_2 \to S_1) &= (\mathbf{M}(P, S_2 \to S_1) \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n}, \\ \mathbf{M}_t(P, S_2 \to S_1) &= -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}(P, S_2 \to S_1)) \,. \end{cases}$$

Le torseur cinématique du mouvement de S_2 par rapport à S_1 s'écrit lui aussi au point P de contact :

$$\{\, \mathcal{V}(S_2/S_1) \,\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{\Omega}(S_2/S_1) \\ \\ \mathbf{V}(P, S_2/S_1) \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{\Omega}_n(2/1) + \mathbf{\Omega}_t(2/1) \\ \\ \mathbf{V}_g(P \in 2/1) \end{array} \right\}_P .$$

On appelle la composante normale du vecteur rotation le vecteur rotation de pivotement et la composante tangentielle vecteur rotation de roulement :

$$\begin{cases} \mathbf{\Omega}_n(S_2/S_1) &= \big(\mathbf{\Omega}(S_2/S_1) \cdot \mathbf{n}\big)\,\mathbf{n}, \\ \mathbf{\Omega}_t(S_2/S_1) &= -\mathbf{n} \wedge \big(\mathbf{n} \wedge \mathbf{\Omega}(S_2/S_1)\big) \,. \end{cases}$$

On généralise les lois de Coulomb en introduisant des coefficients de frottement de roulement et de pivotement en écrivant de la même manière si les vecteurs rotation sont non nuls :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_n(P, S_2 \to S_1) \cdot \mathbf{\Omega}_n(S_2/S_1) &\leqslant 0, \\ \mathbf{M}_n(P, S_2 \to S_1) &= \delta\, \mathbf{F}_n(S_2 \to S_1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_t(P, S_2 \to S_1) \cdot \mathbf{\Omega}_t(S_2/S_1) &\leqslant 0, \\ \mathbf{M}_t(P, S_2 \to S_1) \wedge \mathbf{\Omega}_t(S_2/S_1) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_t(P, S_2 \to S_1) &= \eta\, \mathbf{F}_t(S_2 \to S_1). \end{cases}$$

Les paramètres η et δ sont homogènes à des longueurs et valent (contact pneu chaussée) $0,01$ m. Pour un contact de type roue métallique rail on a $0,000005$ m. On peut se représenter ce paramètre η comme une dimension caractéristique de la surface de contact. Dans le cas d'un contact ponctuel idéalisé (pas de surface de contact), le torseur des actions mécaniques se réduit – au point de contact – à sa résultante.

4.1.5 Action mécanique à distance

Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'action mécanique exercée par la gravité sur le solide S est une action à distance s'appliquant sur le volume de S. Soit M_S la masse de S et $\mathbf{g} = -g\mathbf{z}$ le vecteur accélération de la pesanteur, on peut écrire le torseur des actions mécaniques dues à la gravité sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}(\text{ext} \to \text{S}) = \int_S \mathrm{d}\mathbf{f}(\text{ext} \to \text{S}) = \int_S \mathbf{g}\ \mathrm{d}m = -M_S g\,\mathbf{z},$$

en considérant le vecteur $\mathbf{z}$ vertical ascendant et $\mathbf{g}$ vertical descendant avec g constant sur le domaine d'intégration.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\text{A}, \mathbf{F}(\text{ext} \to \text{S})) &= \int_{M \in S} \mathbf{AM} \wedge \mathrm{d}\mathbf{F}(\text{ext} \to \text{S}) \\ &= -g \int_{M \in S} \mathbf{AM}\ \mathrm{d}m \wedge \mathbf{z}. \end{aligned}$$

On rappelle que l'on définit le centre de masse (ou d'inertie) C de S comme le point tel que :

$$M_S \mathbf{AC} = \int_{M \in S} \mathbf{AM}\ \mathrm{d}m \quad \forall \text{A}.$$

On peut donc reprendre l'expression du moment $\mathbf{M}(\text{A}, \mathbf{F}(\text{Ext} \to \text{S}))$ et écrire :

$$\mathbf{M}(\text{A}, \mathbf{F}(\text{Ext} \to \text{S})) = -g M_S \mathbf{AC} \wedge \mathbf{z}.$$

Propriété : dans le cas $\mathbf{g} = \mathbf{cste}$, le moment des actions de gravité au point C, centre de masse du système, est nul et le torseur des actions de la gravité se réduit donc en ce point à un glisseur.

Remarque

- centre d'inertie / centre de masse : on admettra l'équivalence entre centre de masse et centre d'inertie ;
- centre de masse (ou d'inertie) / centre de gravité : le centre de gravité d'un objet est par définition le point d'application de son poids. Si les dimensions de l'objet sont telles que l'hypothèse « g constant sur le domaine d'intégration » est fausse alors on constate que le centre de masse C n'est pas forcément confondu avec le centre de gravité G (on doit laisser $\mathbf{g}$ dans l'intégration). Si par contre le champ d'accélération de la pesanteur est constant sur le domaine d'intégration alors il y a aussi équivalence entre le centre de masse et le centre de gravité.

Tous les exemples traités dans cet ouvrage correspondent à des objets mécaniques de petites dimensions ; en conséquence les points C et G seront confondus.

4.2 LIAISONS

Un mécanisme est un ensemble de solides reliés entre eux par des liaisons en vue d'obtenir un mouvement déterminé. L'objectif de ce paragraphe est de les recenser et de les décrire mécaniquement. À partir d'un ensemble de liaisons simples, tous les mouvements seront alors possibles et les actions mutuelles entre solides pourront être totalement caractérisées.

4.2.1 Définitions

a) Liaisons parfaites

Une liaison est parfaite si le jeu de fonctionnement est nul (pas fondamental comme hypothèse) et si le contact se fait sans frottement. Une liaison est parfaite si et seulement si la **puissance dissipée** par la liaison est nulle. La puissance mécanique développée par les inter-efforts de liaison entre un solide S_1 et un solide S_2, par rapport à un repère R, est égale au comoment du torseur cinématique de S_2 sur S_1 et du torseur des actions mécaniques de S_1 sur S_2 (on anticipe sur la suite mais utilisons ce résultat). Les torseurs cinématiques des liaisons, en un point de contact P, sont de la forme :

$$\{\ \mathcal{V}(S_2/S_1)\ \} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{\Omega}(S_2/S_1) \\ \mathbf{V}(P \in S_2/S_1) \end{array} \right\}_P .$$

Les torseurs des actions mécaniques, ou torseurs statiques, définis en un point P s'écrivent quant à eux :

$$\{\ \mathcal{A}(S_1 \to S_2)\ \} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}(S_1 \to S_2) \\ \mathbf{M}(P, S_1 \to S_2) \end{array} \right\}_P .$$

La puissance des actions mutuelles de liaison entre un solide S_1 et un solide S_2 en P se définit ainsi comme suit :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\ \mathcal{A}(S_1 \to S_2)\ \}_P \cdot \{\ \mathcal{V}(S_2/S_1)\ \}_P , \tag{4.1}$$

où « · » représente le *comoment* entre les torseurs cinématique et statique. Une étude plus approfondie de la puissance des inter-efforts et des actions mutuelles est proposée dans le chapitre 4.

S'il s'agit d'une liaison parfaite l'équation 4.1 s'annule, garantissant une dissipation nulle de l'énergie :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\ \mathcal{A}(S_1 \to S_2)\ \}_P \cdot \{\ \mathcal{V}(S_2/S_1)\ \}_P = 0, \forall P \in S_1 \cap S_2.$$

En remplaçant les différents torseurs par leur expression ci-dessus définie, cette dernière équation se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} P(S_1 \leftrightarrow S_2) &= \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}(S_1 \to S_2) \\ \mathbf{M}(P, S_1 \to S_2) \end{array} \right\}_P \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{\Omega}(S_2/S_1) \\ \mathbf{V}(P \in S_2/S_1) \end{array} \right\}_P \\ &= \mathbf{R}(S_1 \to S_2) \cdot \mathbf{V}(P \in S_2/S_1) + \mathbf{M}(P, S_1 \to S_2) \cdot \mathbf{\Omega}(S_2/S_1) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

L'équation 4.3 montre une dualité entre **cinématique** et **statique**. À partir de cette expression et de la connaissance du torseur statique de la liaison parfaite considérée, on peut exprimer une équation sur le torseur cinématique, et réciproquement pour le torseur statique si l'on connaît le torseur cinématique.

Exemple

Soit un solide S_1 quelconque en liaison parfaite avec un solide S_2, le torseur d'action de liaison étant défini de la façon suivante dans un repère $R\,(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$:

$$\{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\ \} = \left\{ \begin{array}{c} X\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_P,$$

il est alors possible d'obtenir le torseur cinématique de cette liaison inconnue à partir de la puissance. En effet, en développant l'expression de la puissance dissipée :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) &= \{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\ \}_P \cdot \{\ \mathcal{V}(S_2/S_1)\ \}_P \\ &= \left\{ \begin{array}{c} X\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_P \cdot \left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + \Omega_y\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + V_y\,\mathbf{y} + V_z\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_P \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Et en annulant le comoment de l'expression 4.3, la puissance dissipée étant nulle pour une liaison parfaite, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = &\ (X\,\mathbf{x} \cdot V_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} \cdot V_y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \cdot V_z\,\mathbf{z}) \\ &+ (0\,\mathbf{x} \cdot \Omega_x\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} \cdot \Omega_y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \cdot \Omega_z\,\mathbf{z}) = 0. \end{aligned}$$

Comme cette relation doit être vérifiée quelle que soit la valeur des composantes X, Z et M du torseur statique, il est possible d'en déduire les conditions suivantes sur les composantes du torseur cinématique dans le repère R :

$$\left\{ \begin{array}{lclll} X\,\mathbf{x} \cdot V_x\,\mathbf{x} &=& 0 & \forall(X, V_x) & \Rightarrow\ V_x = 0, \\ 0\,\mathbf{y} \cdot V_y\,\mathbf{y} &=& 0 & \forall(V_y) & \Rightarrow\ V_y \neq 0, \\ Z\,\mathbf{z} \cdot V_z\,\mathbf{z} &=& 0 & \forall(Z, V_z) & \Rightarrow\ V_z = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lclll} 0\,\mathbf{x} \cdot \Omega_x\,\mathbf{x} &=& 0 & \forall(\Omega_x) & \Rightarrow\ \Omega_x \neq 0, \\ M\,\mathbf{y} \cdot \Omega_y\,\mathbf{y} &=& 0 & \forall(M, \Omega_y) & \Rightarrow\ \Omega_y = 0, \\ 0\,\mathbf{z} \cdot \Omega_z\,\mathbf{z}) &=& 0 & \forall(\Omega_z) & \Rightarrow\ \Omega_z \neq 0. \end{array} \right.$$

Le torseur cinématique de la liaison inconnue s'écrit alors :

$$\{\ \mathcal{V}(S_2/S_1)\ \} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + V_y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_P. \quad (4.4)$$

> Les termes nuls et non nuls sont complémentaires dans les deux torseurs. En pratique, si le torseur statique présente une composante de force ou de moment nulle selon un axe, le torseur cinématique aura une composante de rotation ou de vitesse non nulle selon ce même axe :
>
> $$\{\ \mathcal{A}(S_1 \to S_2)\ \} = \left\{ \begin{array}{c} X\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_P,$$
>
> $$\{\ \mathcal{V}(S_2/S_1)\ \} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + V_y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_P.$$

Dans la pratique, c'est plutôt sur le torseur cinématique que des équations peuvent être écrites *a priori*, elles permettent d'en déduire des informations sur le torseur statique ; le principe reste identique. Toutes les liaisons de référence considérées par la suite sont parfaites. Parfois, une liaison imparfaite est décrite en ajoutant des actions de liaison à la liaison parfaite (une liaison glissière associée à un amortisseur et un ressort axiaux forment une liaison glissière dissipative).

b) Degré de mobilité d'une liaison

On dit qu'une liaison a un degré de mobilité m si elle autorise m mouvements indépendants. Le degré de mobilité représente le nombre de mouvements indépendants possibles d'un solide par rapport à un autre. Plus généralement, il désigne le nombre de paramètres scalaires cinématiques utiles pour paramétrer la position d'un solide par rapport au repère de référence R et que l'on peut faire varier **indépendamment** les uns des autres. Les degrés de mobilité seront explicités pour chacune des liaisons décrites dans la suite du paragraphe.

4.2.2 Liaison ponctuelle

La *liaison ponctuelle* entre deux solides S_1 et S_2 est représentée par un point. Elle suppose dans la pratique des solides indéformables du type cône sur un plan (figure 4.2), ou toute surface de forme quelconque en appui sur une autre surface en un point, comme une sphère en appui sur un plan (figure 4.3). Le contact est supposé permanent en O, la vitesse ne peut donc pas avoir de composante selon l'axe (O, $\mathbf{z}$).

Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.2, c'est-à-dire avec un repère R(O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$) où O est le point de contact et $\mathbf{z}$ la normale au plan P_1, le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotations autour de (O, $\mathbf{x}$), (O, $\mathbf{y}$), (O, $\mathbf{z}$) ;
- translations suivant (O, $\mathbf{x}$), (O, $\mathbf{y}$).

On peut résumer ces conditions sous la forme d'une condition :

$$\mathbf{V}(O/R) \cdot \mathbf{z} = 0.$$

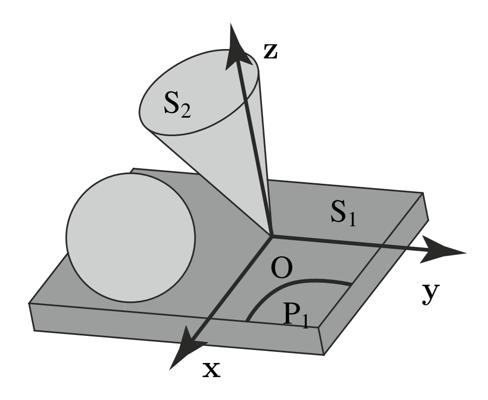


Figure 4.2 Liaison ponctuelle représentée par le contact d'une sphère ou d'un cône sur un plan.

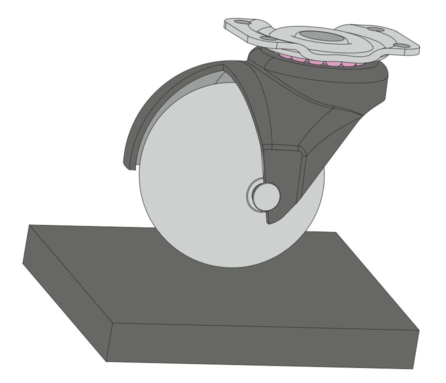


Figure 4.3 Exemple de liaison ponctuelle : une roulette sphérique rigide sur le sol.

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + \Omega_y\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + V_y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Le torseur statique s'écrit donc :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \to S_2) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Degrés de mobilité. En étudiant le torseur cinématique, il apparaît que cinq mouvements sont possibles. Ils sont indépendants les uns des autres, c'est-à-dire qu'une translation ou une rotation selon un axe peut être effectuée sans influer sur les mouvements des autres axes. Le degré de mobilité *m* de cette liaison vaut donc cinq.

4.2.3 Liaison linéaire rectiligne

La *liaison linéaire rectiligne* entre S_1 et S_2 est du type cylindre en appui sur un plan. Le contact entre les deux solides est une droite (figure 4.4). Un exemple pratique ce cette liaison est le roulement à rouleaux (figure 4.5).

Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.4, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ où la droite $(O, \mathbf{x})$ est confondue avec la ligne de contact entre S_2 et S_1 et où $\mathbf{z}$ est la normale au plan P_1, le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotations autour de $(O, \mathbf{x})$, $(O, \mathbf{z})$;
- translations suivant $(O, \mathbf{x})$, $(O, \mathbf{y})$.

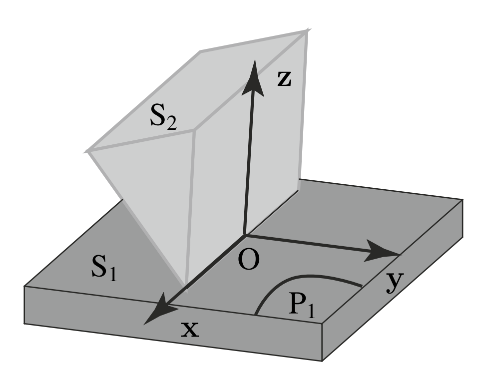


Figure 4.4 Liaison linéaire rectiligne. Le contact entre les deux solides est une droite.

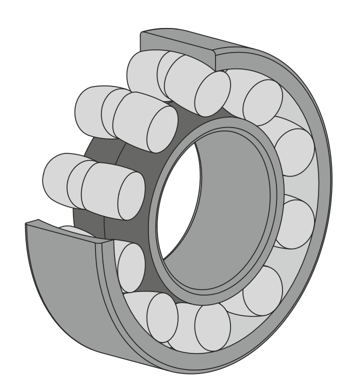


Figure 4.5 Exemple de liaison rectiligne : un roulement à rouleaux.

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_1/S_2) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + V_y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Le torseur statique s'écrit alors :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Degrés de mobilité. Le degré de mobilité m de cette liaison vaut quatre.

4.2.4 Liaison linéaire annulaire

La *liaison linéaire annulaire* entre S_1 et S_2 est du type sphère dans un cylindre creux de même diamètre (figure 4.6). La ligne de contact entre les deux solides est un cercle. Un exemple pratique ce cette liaison est le roulement à billes (figure 4.7).

Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.6, c'est-à-dire avec un repère R (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$) au centre de S_2, le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotations autour de (O, $\mathbf{x}$), (O, $\mathbf{y}$), (O, $\mathbf{z}$) ;
- translation suivant (O, $\mathbf{x}$).

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + \Omega_y\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

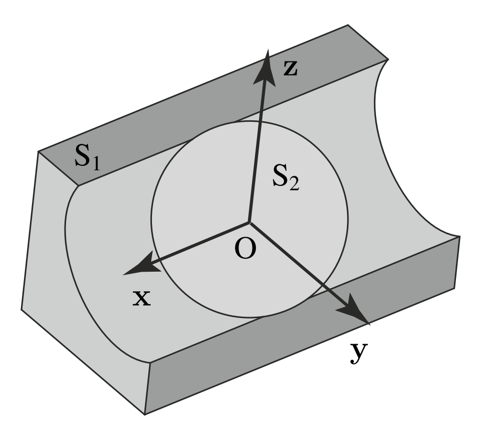


Figure 4.6 Liaison linéaire annulaire. Le contact entre les deux solides est un cercle.

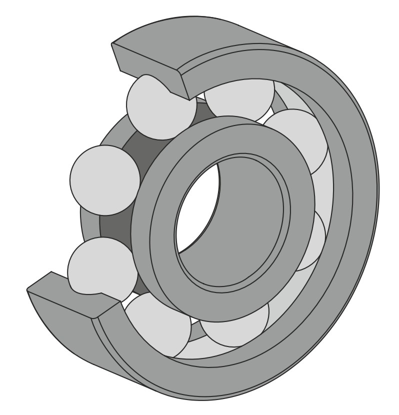


Figure 4.7 Exemple de liaison annulaire : un roulement à billes.

L'expression du torseur statique est donc :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Degrés de mobilité. Le degré de mobilité de cette liaison vaut quatre.

4.2.5 Liaison rotule

La *liaison rotule* est du type sphère dans une sphère creuse de même diamètre (figure 4.8). La surface de contact entre les deux solides est la surface de la sphère intérieure. Un exemple de cette liaison est celle entre le châssis et la roue d'une voiture (figure 4.9).

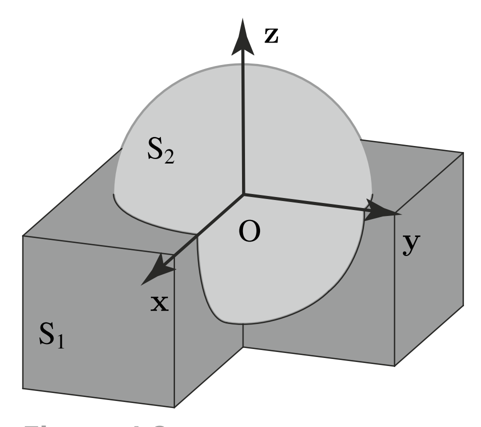


Figure 4.8 Liaison rotule. Le contact entre les deux solides est une sphère.

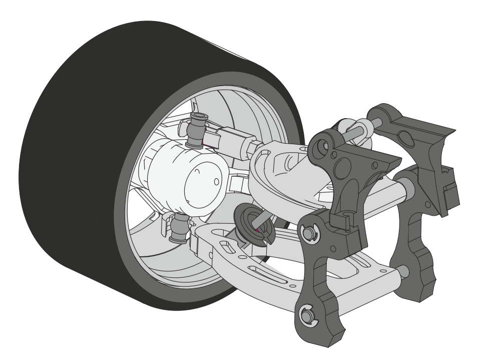


Figure 4.9 Exemple de liaison rotule : la liaison châssis/roue d'une voiture.

Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.8, c'est-à-dire avec un repère R(O, **x**, **y**, **z**) au centre de S_2, le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose suivant les trois rotations autour de (O, **x**), (O, **y**), (O, **z**).

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + \Omega_y\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

D'où l'expression du torseur statique :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Degrés de mobilité. Le torseur cinématique fait apparaître trois mouvements indépendants. Le degré de mobilité vaut donc trois.

4.2.6 Liaison appui plan

La *liaison appui plan* est du type plan sur plan (figure 4.10). La surface de contact entre les deux solides est un plan. Un exemple de cette liaison est celle entre les plaquettes de frein d'une voiture et le disque lié à la roue (figure 4.11).

Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.10, c'est-à-dire avec un repère R(O, **x**, **y**, **z**) au centre de S_2 en contact avec le plan S_1, le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotation autour de (O, **z**) ;
- translations suivant (O, **x**), (O, **y**).

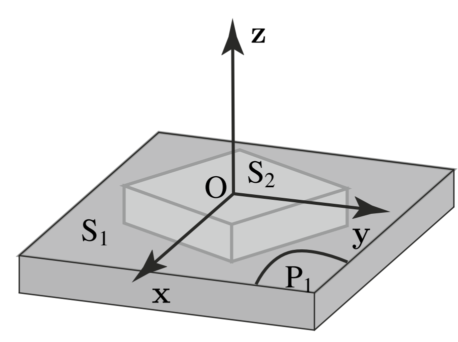


Figure 4.10 Liaison plan sur plan. Le contact entre les deux solides est un plan.

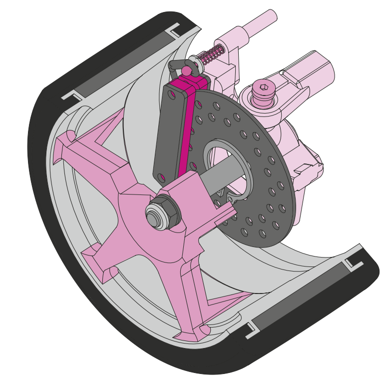


Figure 4.11 Exemple de liaison plan sur plan : les plaquettes de frein d'une voiture sur le disque lié à la roue.

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{\ \mathcal{V}(S_2/S_1)\ \} = \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + V_y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Torseur statique. Le torseur statique s'écrit donc :

$$\{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\ \} = \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Degrés de mobilité. Trois mouvements indépendants sont identifiables à partir du torseur cinématique. Le degré de mobilité m de cette liaison vaut donc trois.

4.2.7 Liaison pivot glissant

La *liaison pivot glissant* est du type cylindre à base circulaire dans un cylindre creux à base circulaire de même rayon (figure 4.12). La surface de contact entre les deux solides est donc un cylindre. Un exemple de cette liaison est celle du système coulissant entre la partie supérieure et inférieure d'un amortisseur de voiture (figure 4.13).

Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.12, c'est-à-dire avec un repère R(O, **x**, **y**, **z**) au centre de S_2, le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotation autour de (O, **x**) ;
- translation suivant (O, **x**).

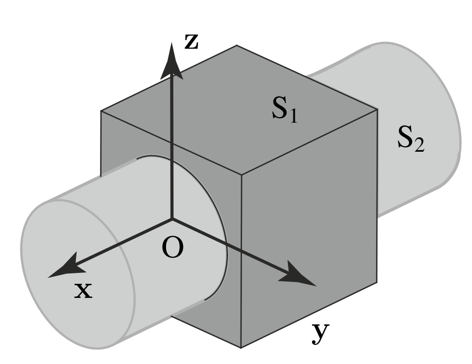


Figure 4.12 Liaison pivot glissant. Le contact entre les deux solides est un cylindre à base circulaire.

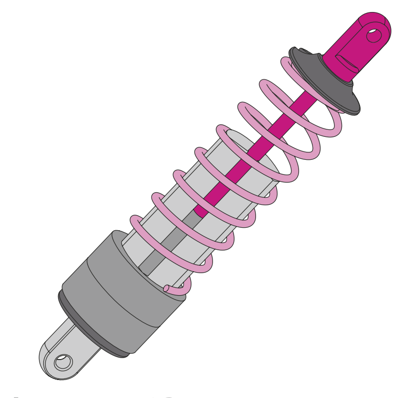


Figure 4.13 Exemple de liaison pivot glissant : un amortisseur dont la partie supérieure coulisse dans la partie inférieure.

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Torseur statique. Le torseur statique s'écrit donc :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + N\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Degrés de mobilité. Le torseur cinématique montre que deux mouvements sont possibles et sont indépendants. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc deux.

4.2.8 Liaison pivot

La *liaison pivot* est du type forme de révolution non cylindrique dans une forme identique (figure 4.14). La surface de contact entre les deux solides est la surface de cette forme. Un exemple pratique de cette liaison est une charnière de porte (figure 4.15). Dans le cas de la figure 4.14, le cylindre S_2 est bloqué en translation par les circlips. Il ne peut qu'effectuer des rotations selon l'axe (O, **x**).

Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.14, c'est-à-dire avec un repère R (O, **x**, **y**, **z**) au centre de S_2, le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose en une rotation autour de (O, **x**).

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

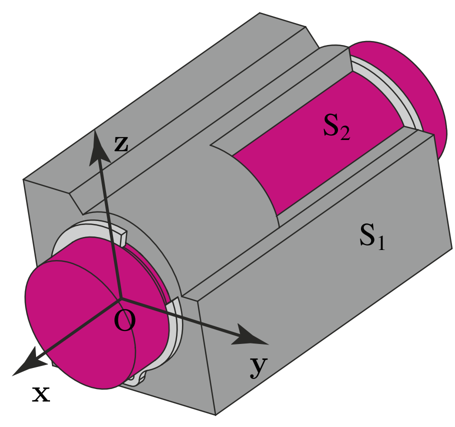


Figure 4.14 Liaison pivot. Le contact entre les deux solides est un cylindre.

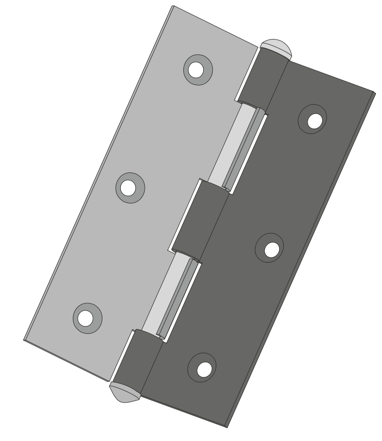


Figure 4.15 Exemple de liaison pivot : une charnière de porte.

Torseur statique

$$\left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2)\ \right\}_{\mathrm{O}} = \left\{ \begin{array}{l} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + N\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{O}}.$$

Degrés de mobilité. Un seul mouvement est possible pour ce type de liaison, c'est une rotation unique. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc un. De l'utilité d'exprimer les torseurs statiques en un point particulier (le centre de la liaison, un point de l'axe...).

Cas de la liaison pivot parfaite. Plaçons-nous dans un plan. L'objectif est d'établir le torseur statique de la liaison à partir d'une répartition d'effort quelconque. Pour cela, il faut repartir de la formulation générale de la résultante et du moment du torseur statique. Dans le cas de la liaison pivot parfaite (figure 4.16), toutes les forces élémentaires d$\mathbf{F}$ agissant sur le solide S_2 sont radiales et toutes les directions des forces sont concourantes au point O, centre de la liaison. On définit le trièdre direct (M, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$) tel que $\mathbf{u}$ est normal à tout point M de la surface de S_2.

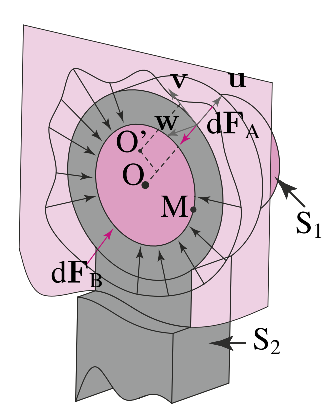


Figure 4.16 **Deux solides S_1 et S_2 en liaison pivot parfaite d'axe (O, $\mathbf{w}$).**

1. Résultante

   La résultante du torseur statique s'écrit pour tout point M de la surface de contact :

$$\mathbf{F}(\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2) = \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}_2} \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{S}_1 \to \mathrm{M}).$$

   Toutes les forces élémentaires agissant sur S_2 ne sont pas forcément identiques en norme. Ainsi, $||\mathrm{d}\mathbf{F}_\mathrm{A}|| \neq ||\mathrm{d}\mathbf{F}_\mathrm{B}||$. Bien que les deux forces soient opposées, leur norme est différente. Lors de l'intégration des forces sur la surface de S_2, le résultat ne sera donc pas nul. La résultante du torseur statique de la liaison pivot possède donc des composantes selon $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans notre cas.

2. Moment résultant
Nous allons calculer ce moment en O, centre de la liaison pivot, puis en un point décalé du centre, O′.

- Moment résultant en O
Le moment des forces élémentaires agissant de S_1 sur S_2 s'écrit :

$$\mathbf{M}(\mathrm{O}, \mathbf{F}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{S}_2)) = \int_{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S}_2} \mathbf{OM} \wedge \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{M}).$$

Or le vecteur $\mathbf{OM}$ et toutes les forces élémentaires sont dirigées selon $\mathbf{u}$. Le produit vectoriel est donc nul. Le moment du torseur statique de la liaison pivot est nul s'il est calculé au centre de la liaison.

- Moment résultant en O′
Plaçons-nous dans le cas particulier de $\mathrm{d}\mathbf{F}_\mathrm{A}$ et calculons son moment en O′ :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\mathrm{O}', \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{A}) &= \mathbf{O'A} \wedge \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{A}) \\ &= (\bullet\mathbf{u} + \bullet\mathbf{v}) \wedge \mathrm{dF}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{A})\,\mathbf{u} \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Le moment résultant n'est pas nul s'il est calculé en un point qui n'est pas le centre de la liaison. Pour une même action, une rotation de S_2 autour de (O, $\mathbf{w}$), plusieurs moments peuvent être choisis pour décrire la liaison. Dans un souci de simplicité, il conviendra de choisir une description de laison en son centre pour éviter la sur-abondance de paramètres.

Finalement, au centre de la liaison, le torseur statique de la liaison pivot s'exprime :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{S}_2)\ \right\}_\mathrm{O} = \left\{ \begin{array}{c} U\mathbf{u} + V\mathbf{v} \\ 0\mathbf{w} \end{array} \right\}_\mathrm{O}.$$

Cas particulier de la liaison pivot non parfaite. Si la liaison n'est pas parfaite, c'est-à-dire qu'il existe du frottement entre S_1 et S_2, les directions des forces exercées par S_2 sur S_1 ne sont plus radiales et concourantes en O (figure 4.17).

1. Résultante
Pour calculer la résultante du torseur statique, nous procédons de même que précédemment. Nous pouvons en conclure que la résultante n'est pas nulle.

2. Moment résultant
Il s'agit de calculer le moment résultant des forces élémentaires en O. En reprenant l'expression précédente et dans le cas particulier de $\mathrm{d}\mathbf{F}_\mathrm{A}$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\mathrm{O}, \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{A}) &= \mathbf{OA} \wedge \mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{A}) \\ &= \bullet\mathbf{u} \wedge (\,\mathrm{dF}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{A})\,\mathbf{u} + \mathrm{dF}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{A})\,\mathbf{v}\,) \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

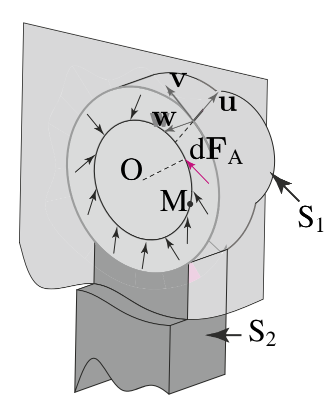


Figure 4.17 **Deux solides S_1 et S_2 en liaison pivot d'axe (O, w) avec du frottement.**

Le moment résultant n'est pas nul car la force $d\mathbf{F}_A$ n'est pas dans la direction d'un rayon de la liaison pivot. Il convient ensuite de généraliser l'expression à toutes les forces élémentaires en calculant l'intégrale sur la surface de S_2.

Finalement, dans le cas d'une liaison avec frottement, le torseur statique s'écrit :

$$\left\{ \ \mathcal{A}(S_1 \to S_2) \ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} U\mathbf{u} + V\mathbf{v} \\ W\mathbf{w} \end{array} \right\}_O .$$

4.2.9 Liaison glissière

La *liaison glissière* est du type cylindre à base non circulaire dans un cylindre présentant un creux de forme identique (figure 4.18). La surface de contact entre les deux solides est la surface du cylindre intérieur. Un exemple pratique est l'ouverture d'un téléphone portable par coulissement de l'écran sur le clavier (figure 4.19).

Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.18, c'est-à-dire avec un repère R (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$) au centre de S_2, le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose selon une translation suivant (O, $\mathbf{x}$).

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\left\{ \ \mathcal{V}(S_2/S_1) \ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Torseur statique

$$\left\{ \ \mathcal{A}(S_1 \to S_2) \ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + N\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Degrés de mobilité. Un seul mouvement est possible pour ce type de liaison, c'est une translation unique. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc un.

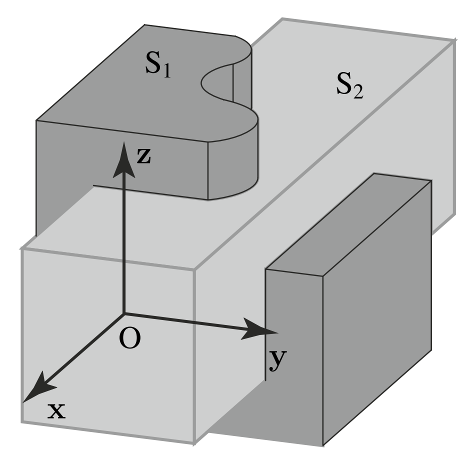


Figure 4.18 **Liaison glissière. Le contact entre les deux solides est un parallélépipède.**



Figure 4.19 **Exemple de liaison glissière : un téléphone portable dont la partie supérieure coulisse sur la partie inférieure.**

4.2.10 Liaison hélicoïdale

La *liaison hélicoïdale* est caractérisée par l'existence d'un mouvement combiné qui rend possible la rotation uniquement s'il y a une translation simultanée (figure 4.20). La surface de contact entre les deux solides est une surface hélicoïdale définie par le pas p de l'hélice. Un exemple pratique de cette liaison est le système de vis d'un serre-joint (figure 4.21).

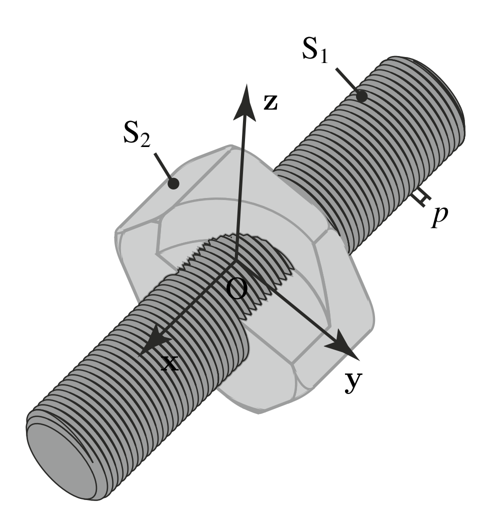


Figure 4.20 **Liaison hélicoïdale.**

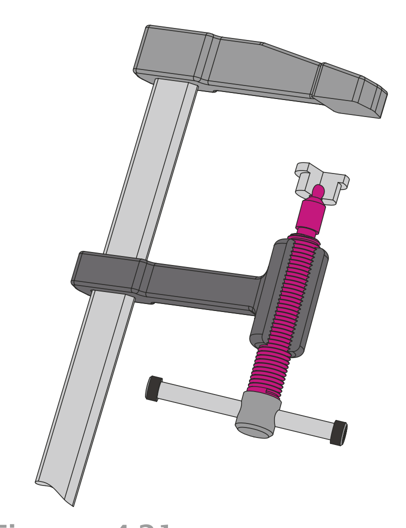


Figure 4.21 **Exemple de liaison hélicoïdale : la vis d'un serre-joint.**

Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.20, c'est-à-dire avec un repère R(O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$) au centre de S_2, le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotation autour de (O, $\mathbf{x}$) ;
- translation suivant (O, $\mathbf{x}$).

Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \right\} = \left\{ \begin{matrix} \Omega_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{matrix} \right\}_O .$$

Torseur statique. Le torseur statique s'écrit alors :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2) \right\} = \left\{ \begin{matrix} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + N\,\mathbf{z} \end{matrix} \right\}_O .$$

Relation entre les composantes des torseurs cinématique et statique. Il est possible d'écrire le torseur cinématique pour tout point P de l'axe (O, $\mathbf{x}$) comme suit :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \right\} = \left\{ \begin{matrix} \Omega\mathbf{x} \\ \Omega p\mathbf{x} \end{matrix} \right\}_P ,$$

où Ω est la vitesse de rotation de S_1 par rapport à S_2. Le cas étudié fait avancer le solide S_1 selon (O, +$\mathbf{x}$). Dans le cas contraire, la composante du moment du torseur cinématique est négative ($V_x = -\Omega p$). On parle alors d'hélice à droite pour le cas étudié ici, sinon d'hélice à gauche. En développant l'expression de la puissance qui est nulle dans les liaisons parfaites, il vient que :

$$p\Omega X + L\Omega = 0.$$

La relation entre les deux composantes non indépendantes s'écrit alors :

$$L = -pX.$$

Degrés de mobilité. Le torseur cinématique de la liaison hélicoïdale fait apparaître deux mouvements possibles qui sont une translation et une rotation suivant le même axe. Cependant, nous venons de montrer qu'il existe une relation entre la translation et la rotation de S_2 par rapport à S_1. Les deux mouvements sont donc liés, ils ne sont par conséquent pas indépendants. La connaissance d'un de ces mouvements permet d'obtenir l'autre grâce à la relation ci-dessus définie. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc un.

4.2.11 Liaison encastrement

La *liaison encastrement* interdit tout mouvement relatif entre les solides suite à l'existence de multiples contacts entre eux (figure 4.22). Une application pratique de cette liaison est le système de freinage par blocage du disque lié à la roue (figure 4.23).

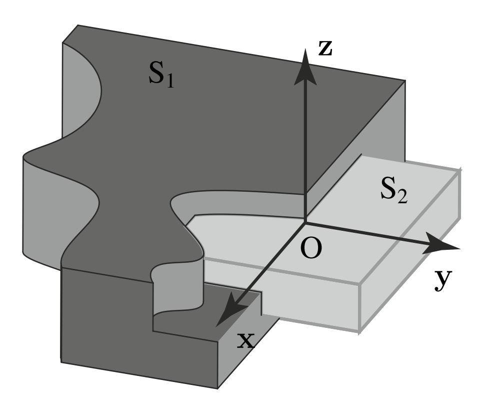


Figure 4.22 Liaison encastrement.

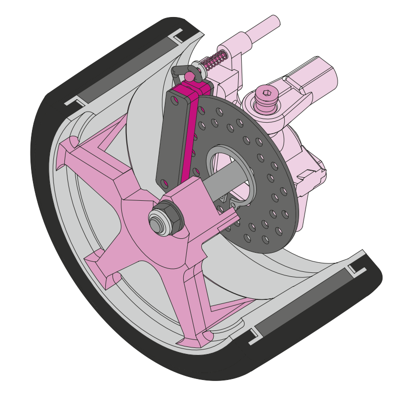


Figure 4.23 Exemple de liaison encastrement : au freinage maximum (sans ABS), les plaquettes bloquent le disque par une liaison équivalente à un encastrement.

Mouvements possibles. Aucun mouvement n'est possible avec une liaison encastrement.

Torseur cinématique. Il s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Torseur statique. Le torseur statique s'écrit donc :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + N\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O .$$

Degrés de mobilité. Le torseur cinématique ne fait pas apparaître de mouvement possible. Le degré de mobilité de cette liaison est nul : $m = 0$.

4.3 Schématisation des systèmes mécaniques

Dans le but d'analyser et de comprendre le fonctionnement d'un système mécanique, il est souvent plus facile d'en faire une représentation schématique. Il existe deux formes complémentaires de schématisation : le graphe des actions mécaniques et le schéma cinématique.

4.3.1 Graphe des actions mécaniques

Le graphe des liaisons permet de représenter l'organisation des liaisons entre les solides d'un système mécanique. Bien souvent, on complète ce graphique par l'ajout des forces extérieures au mécanisme, il porte alors le nom de graphe des actions mécaniques. Ce type de graphique permet d'analyser rapidement le mécanisme aussi bien pour une étude statique que dynamique. En pratique, dans le graphe des liaisons d'un mécanisme, les solides sont schématisés par des cercles et les liaisons par des arcs de courbe joignant ces cercles. Une spécification précise des liaisons et des efforts peut y est être ajoutée. Un exemple de graphe des liaisons (ou plutôt graphe des actions mécaniques) est proposé sur la figure 4.24 de la pompe manuelle proposée en exercice (voir figure 5.11).

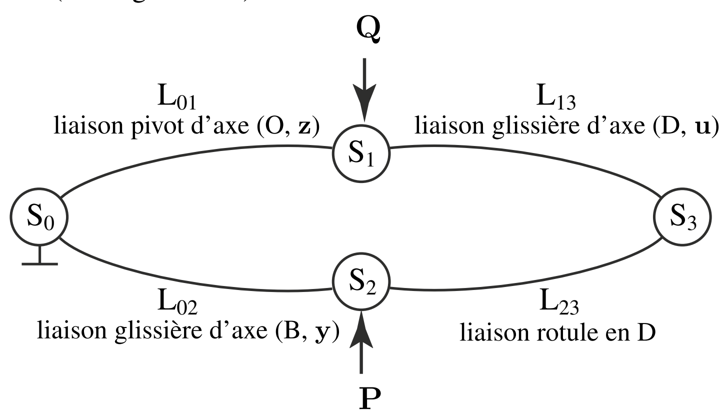


Figure 4.24 **Exemple d'un graphe des actions mécaniques de la pompe manuelle proposée en exercice.**

4.3.2 Schéma cinématique

Le schéma cinématique permet de modéliser les interactions cinématiques entre les solides d'un même mécanisme. Ce type de représentation permet de décomposer de manière détaillée une liaison entre deux solides. Par exemple, une liaison pivot réalisée par deux roulements à billes assurant respectivement une liaison rotule et une liaison linéaire annulaire sera schématisée par ces deux liaisons. Par ces aspects, le schéma cinématique permet, d'une part, d'aider à la conception d'un mécanisme en lui donnant le principe de fonctionnement cinématique et, d'autre part, d'aider à la compréhension du système à analyser.

En pratique, la réalisation d'un schéma cinématique d'un système consiste simplement à lier des schémas élémentaires de liaison entre eux. Ceux-ci représentent chacun une cinématique établie, telle que la liaison pivot, pivot glissant, etc. Une description schématique de ces éléments est proposée dans le tableau suivant en deux dimensions ou trois dimensions, permettant de proposer le schéma cinématique de la pompe manuelle sur la figure 4.25.

Liaison	Schématisation plane	Liaison	Schématisation plane
Ponctuelle		Linéaire rectiligne	
Linéaire annulaire		Rotule	
Plan sur plan		Pivot glissant	
Hélicoïdale à droite		Hélicoïdale à gauche	
Glissière		Pivot	
Encastrement			

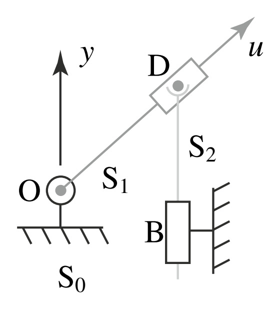


Figure 4.25 **Schéma cinématique de la pompe manuelle.**



Torseur statique d'un solide S_1 sur un solide S_2

Il s'agit d'un torseur composé d'une résultante (de composantes X, Y, Z) et d'un moment (de composantes L, M, N) dans un repère R ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$), qui représentent la force et le moment produit par la force en un point P, contact entre les solides :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \to S_2) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + N\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_P .$$

Caractérisation des liaisons

Le lecteur peut se référer à la normalisation ISO 3952 (elle évolue) ou à un ouvrage classique [12].

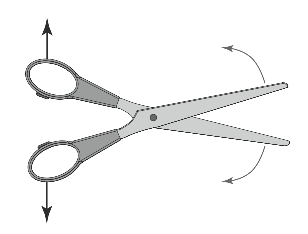
Liaison	Modélisation	Torseur statique	Torseur cinématique
Repère (O, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$)		$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \to S_2) \right\}_O$	$\left\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \right\}_O$
Ponctuelle de normale (O, $\mathbf{z}$) $m = 5$		$\left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O$	$\left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + \Omega_y\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + V_y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O$
Linéaire rectiligne d'axe (O, $\mathbf{x}$), de normale (O, $\mathbf{z}$) $m = 4$		$\left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O$	$\left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + V_y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O$
Linéaire annulaire d'axe (O, $\mathbf{x}$) $m = 4$		$\left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O$	$\left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + \Omega_y\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O$
Rotule de centre O $m = 3$		$\left\{ \begin{array}{c} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O$	$\left\{ \begin{array}{c} \Omega_x\,\mathbf{x} + \Omega_y\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_O$

Liaison	Modélisation	Torseur statique	Torseur cinématique
Appui plan de normale (O, **z**) $m = 3$		$\begin{Bmatrix} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ V_x\,\mathbf{x} + V_y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$
Pivot glissant d'axe (O, **z**) $m = 2$		$\begin{Bmatrix} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + V_z\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$
Glissière hélicoïdale d'axe (O, **z**) $m = 1$		$\begin{Bmatrix} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + N\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$ $N = -pZ$	$\begin{Bmatrix} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + V_z\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$ $V_z = p\Omega_z$
Glissière d'axe (O, **z**) $m = 1$		$\begin{Bmatrix} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + N\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + V_z\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$
Pivot d'axe (O, **z**) $m = 1$		$\begin{Bmatrix} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + \Omega_z\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$
Encastrement $m = 0$		$\begin{Bmatrix} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + N\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{Bmatrix}_O$

Exercices

4.1 Coupe-coupe

On étudie ici le système mécanique que constitue une paire de ciseaux. On considère que le système est formé de trois solides indéformables. Les deux ciseaux sont notés S_1 et S_2 et la vis les reliant est notée S_3. On suppose que le ciseau S_1 est en liaison pivot avec la vis S_3 laquelle est encastrée dans le ciseau S_2.



Donner le schéma cinématique du système et déterminer le degré de mobilité du système.

4.2 La petite reine

On étudie ici le système constitué par un vélo soumis au poids de son utilisateur. Ce système est décrit sur la figure 5.10. Donner le schéma cinématique du système et tracer le graphe des actions mécaniques du système. Déterminer le degré de mobilité du système.

4.3 Tournez manège

Nous reprenons le manège de chevaux de bois (voir la figure 2.15). Donner le schéma cinématique du système et déterminer le degré de mobilité du système.

Solutions des exercices

4.1 Coupe-coupe

Le schéma cinématique est donné sur la figure 4.26. Le degré de mobilité est $m = 1$.

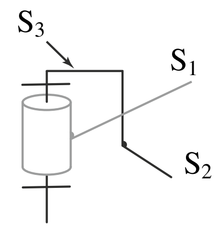


Figure 4.26 Schéma cinématique d'une paire de ciseaux.

4.2 Bielle-manivelle

Le schéma cinématique est donné sur la figure 4.27. Le degré de mobilité est $m = 1$.

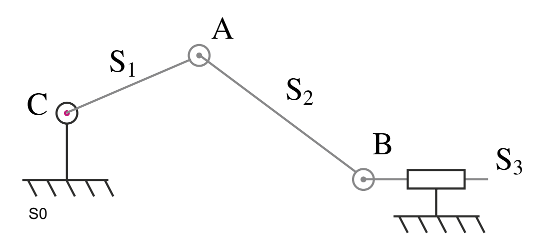


Figure 4.27 **Schéma cinématique d'un système bielle-manivelle.**

4.3 La petite reine

Le schéma cinématique et le graphe des efforts sont donnés sur la figure 4.28 Nous avons les définitions des liaisons suivantes

L_{01} : ponctuelle (I,$\mathbf{y}_0$) ; L_{41} : pivot (A, $\mathbf{z}_0$) ; L_{16} : pivot (D, $\mathbf{y}$) ; L_{56} : pivot (F, $\mathbf{z}_0$) ; L_{05} : ponctuelle (J, $\mathbf{y}_0$). Le degré de mobilité vaut $m = 5$.

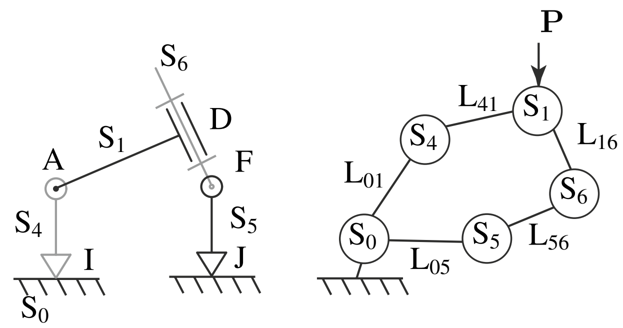


Figure 4.28 **Schéma cinématique du vélo et graphe des actions mécaniques.**

4.4 Tournez manège

Le schéma cinématique est donné sur la figure 4.29. Le degré de mobilité vaut $m = 3$.

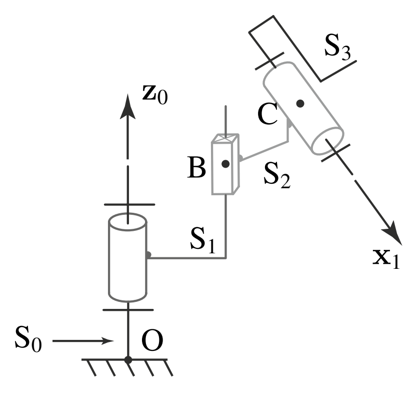


Figure 4.29 **Schéma cinématique du manège.**

5 Statique des solides

5.1 Principe fondamental de la statique

5.1.1 Équilibre

Un solide ou un ensemble de solides est en équilibre par rapport à un référentiel du mouvement R si le vecteur position de chaque point du ou des solides est indépendant du temps dans ce référentiel R (la vitesse de chaque point est donc nulle).

5.1.2 Énoncé du principe

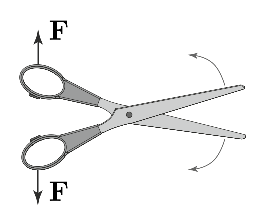
Il existe un référentiel du mouvement galiléen R_g tel que, pour tout sous système s de l'ensemble de solides S_i *en équilibre* par rapport à R_g, le torseur des actions extérieures appliqué à ce sous système est nul :

$$\left\{ \; \mathcal{A}(\text{ext} \to \text{s}) \; \right\} = \{\mathcal{O}\} \quad \forall \text{s} \in \text{S}_\text{i},$$

avec $\{\mathcal{O}\}$ le torseur nul. La notion de référentiel galiléen dépend de l'objet d'étude. Sur Terre, l'étude d'un mécanisme de petite dimension par rapport à la Terre se fait dans le référentiel terrestre qui pourra être considéré comme galiléen. Le référentiel terrestre correspond à un repère local attaché à la Terre. Par contre, pour l'étude d'une fusée, allant de la Terre à la Lune, le référentiel terrestre n'est pas galiléen (*i.e.* le principe fondamental de la statique ne s'applique pas). En revanche le référentiel de Copernic pourra être considéré comme galiléen. Le repère de Copernic est attaché au centre de masse du système solaire et son orientation est fixe par rapport aux étoiles.

Remarque

Attention à la formulation de ce principe. L'équilibre de chacun des sous systèmes d'un ensemble de solides implique que le torseur des actions extérieures à cet ensemble de solides est nul mais la réciproque n'est pas vraie. Prenons l'exemple d'une paire de ciseaux, soumise à l'action de deux forces opposées $\mathbf{F}$. Le système n'est pas à l'équilibre, puisque la paire de ciseaux s'ouvre, et pourtant le torseur des actions extérieures est bien nul. Par contre, si la paire de ciseaux est à l'équilibre, tous les solides qui la composent (les deux ciseaux et l'axe) étant à l'équilibre, alors le torseur des actions extérieures est bien nul.



5.1.3 Théorème de la résultante et théorème du moment résultant

Du principe fondamental de la statique, découlent deux théorèmes :

Théorème de la résultante La résultante des actions mécaniques extérieures à tout sous système s de l'ensemble de solides S_i en équilibre par rapport à un repère galiléen est nulle :

$$\mathbf{F}(\text{ext} \rightarrow \text{s}) = \mathbf{0} \quad \forall \text{s} \in \text{S}_i.$$

Théorème du moment Le moment des actions mécaniques extérieures à un sous système s de l'ensemble de solides S_i en équilibre par rapport à un repère galiléen est nul quel que soit le point A d'expression de ce moment :

$$\mathbf{M}(\text{A}, \mathbf{F}(\text{ext} \rightarrow \text{s})) = \mathbf{0} \quad \forall \text{s} \in \text{S}_i \quad \forall \text{A}.$$

5.1.4 Théorème des actions réciproques

Considérons un système S, constitué de deux sous parties S_1 et S_2 en interaction, en équilibre par rapport à un repère galiléen (voir figure 5.1). Le torseur des actions mécaniques exercées par S_1 sur S_2 est opposé au torseur des actions exercées par S_2 sur S_1 :

$$\{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\ \}_M = -\{\ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_1)\ \}_M, \forall M.$$

En effet, si nous appliquons le principe fondamental de la statique à S_1, nous avons

$$\{\ \mathcal{A}(\bar{S}_1 \rightarrow S_1)\ \}_M = \{\mathcal{O}\}, \forall M.$$

Ce qui est extérieur à S_1 (noté $\bar{S}_1$) est constitué de ce qui est extérieur à S et de S_2, nous avons donc :

$$\{\ \mathcal{A}(\bar{S} \rightarrow S_1)\ \}_M + \{\ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_1)\ \}_M = \{\mathcal{O}\}, \forall M. \tag{5.1}$$

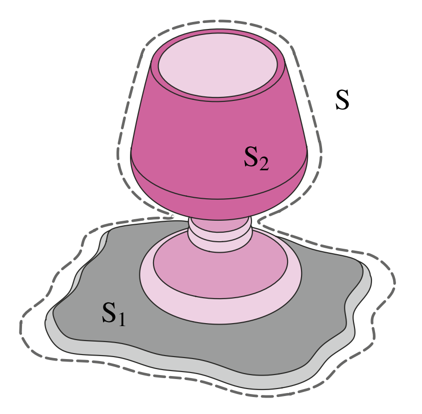


Figure 5.1 Description du système matériel S constitué de deux parties S_1 et S_2.

En considérant le système S_2, il vient

$$\{\ \mathcal{A}(\bar{S} \rightarrow S_2)\ \}_M + \{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\ \}_M = \{\mathcal{O}\}, \forall M. \tag{5.2}$$

En ajoutant les équations (5.1) et (5.2), on obtient :

$$\begin{aligned} &\{\ \mathcal{A}(\bar{S} \rightarrow S_1)\ \}_M + \{\ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_1)\ \}_M \\ + &\{\ \mathcal{A}(\bar{S} \rightarrow S_2)\ \}_M + \{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\ \}_M = \{\mathcal{O}\}, \forall M \end{aligned}$$

ou encore puisque $S = S_1 \cup S_2$,

$$\{\ \mathcal{A}(\bar{S} \rightarrow S)\ \}_M + \{\ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_1)\ \}_M + \{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\ \}_M = \{\mathcal{O}\}, \forall M.$$

Du principe fondamental de la statique appliqué au système matériel S, découle alors le théorème des actions réciproques :

$$\{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\ \}_M = -\{\ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_1)\ \}_M, \forall M \tag{5.3}$$

5.1.5 Cas du problème plan

Un problème statique est dit plan si le système d'étude possède un plan de symétrie et si les forces qui lui sont appliquées sont situées dans ce plan de symétrie ou si elles sont symétriques par rapport à ce plan. En d'autres termes, le système peut être complètement décrit dans un plan. Cela signifie que la composante des forces perpendiculaire au plan est considérée comme nulle (soit parce qu'elle est effectivement nulle, soit parce qu'elle possède un symétrique par rapport au plan et que la composante de la force résultante perpendiculaire au plan sera nulle). De même pour les moments, les composantes selon les axes contenus dans le plan de symétrie seront nulles (soit parce qu'elles sont effectivement nulles, soit parce qu'elles possèdent un symétrique par rapport au plan et que les composantes du moment résultant contenues dans le plan seront nulles).

5.1.6 Statique graphique

La statique graphique est une méthode de résolution rapide et sans calcul applicable aux problèmes plans.

- Un solide est en équilibre sous l'action de **deux** forces extérieures si ces deux forces ont la même intensité et sont de sens opposé et si la somme des moments qu'elles induisent en un point est nulle. En d'autres termes, un solide soumis à deux forces est en équilibre si :
  - les deux forces sont opposées (équation vectorielle des forces) ;
  - les deux forces ont la même droite d'action (équation du moment).

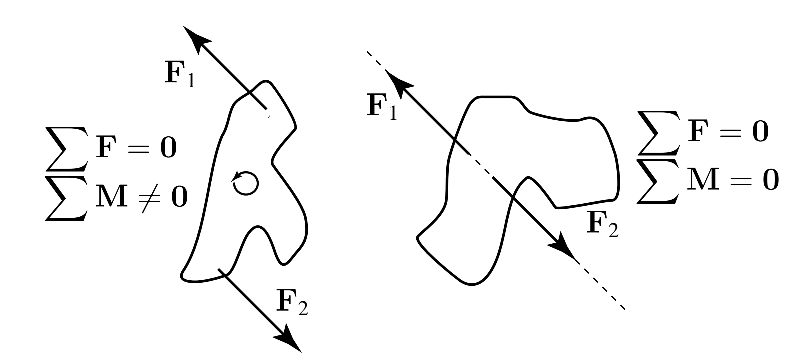


Figure 5.2 **Problème plan : solide soumis à deux forces.**

- Un solide est en équilibre sous l'action de **trois** forces extérieures si ces trois forces sont coplanaires, concourantes ou parallèles et que leur somme géométrique est nulle. Cette dernière implication peut permettre de résoudre graphiquement les problèmes.



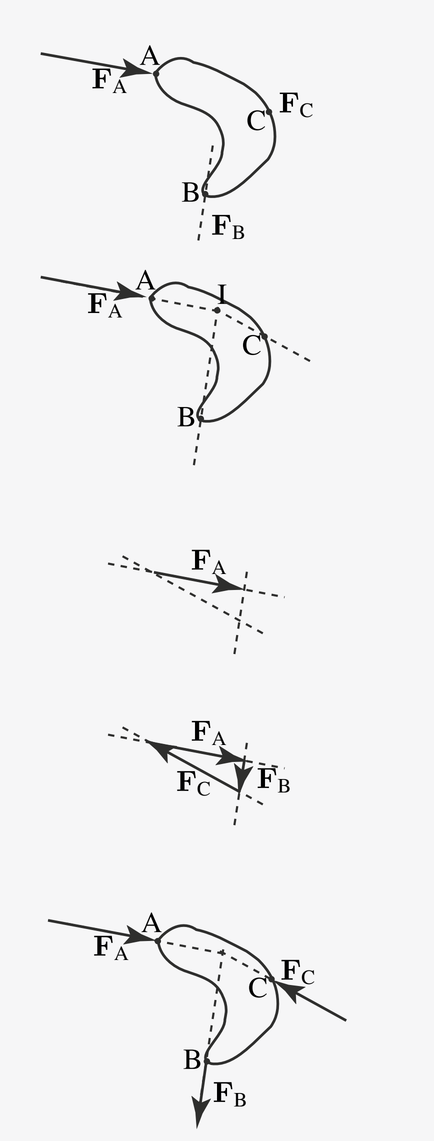
Prenons l'exemple d'un solide isolé soumis à trois forces : $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ et $\mathbf{F}_C$ appliquées respectivement aux points A, B et C, dont nous ne connaissons que $\mathbf{F}_A$ (direction et intensité) et la direction de $\mathbf{F}_B$. Nous proposons ci-dessous les étapes de résolution d'un tel problème :

1 - Une représentation graphique du problème peut être effectuée. Il faut à ce stade faire le bilan des données sur le solide isolé. Nous ne pouvons résoudre un problème graphiquement que si nous avons au plus trois inconnues (ici c'est le cas, nos inconnues sont une direction et deux intensités).

2 - Grâce aux deux directions connues, on détermine le point de concours I des trois forces. On en déduit donc la direction de la force inconnue $\mathbf{F}_C$ (représentée par la ligne (IC)).

3 - Puisque nous savons que la somme géométrique des trois forces est nulle, nous pouvons représenter un triangle regroupant les trois forces, souvent nommé triangle des forces. Pour cela on trace la force connue $\mathbf{F}_A$ à une échelle choisie. Ensuite, à l'extrémité de cette force, on vient représenter les directions de $\mathbf{F}_B$ et $\mathbf{F}_C$ par des lignes parallèles à (IB) et (IC) respectivement. Enfin, on trace les vecteurs $\mathbf{F}_B$ et $\mathbf{F}_C$ en faisant attention à ce que l'extrémité de chaque force rencontre l'origine de la suivante.

4 - La dernière étape consiste à mesurer les intensités des forces jusque là inconnues ($\mathbf{F}_B$ et $\mathbf{F}_C$) à l'échelle choisie précédemment. On reporte les résultats obtenus sur le solide isolé.



Réduction du domaine d'étude. Le principe fondamental de la statique, permet d'écrire six équations scalaires dans l'espace, trois pour la résultante et trois pour le

moment des actions extérieures à un solide. Lorsque le problème est plan, trois équations algébriques peuvent être écrites. Deux équations pour la résultante et une pour le moment. En effet, la composante hors plan de la résultante des forces appliquées est nulle puisque toutes les forces sont planes ou bien possèdent un symétrique par rapport au plan de l'objet. La même remarque vaut pour les moments, les moments induits par les forces appliquées dans le plan sont tous dirigés selon la normale au plan du solide. De plus, tout moment d'axe contenu dans le plan possède un symétrique par rapport au plan, les composantes du moment dans le plan de l'objet sont donc nulles. Finalement, les seules composantes non nulles des vecteurs forces sont contenues dans le plan et la seule composante non nulle du vecteur moment est normale au plan de l'objet. Si le système est parfaitement défini dans le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, les torseurs statiques prendront la forme suivante :

$$\left\{ \mathcal{A}(\mathrm{S}_1 \rightarrow \mathrm{S}_2) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} \\ N\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{A}} .$$

Nous verrons en exercice l'application pratique de cette remarque.

5.2 Analyse des mécanismes

Nous allons nous intéresser à des systèmes de solides en liaison les uns avec les autres par des liaisons sans frottement (liaisons parfaites), les solides sont indéformables et nous négligerons assez souvent les actions de la pesanteur devant les autres actions mécaniques. Le Principe Fondamental de la Statique (PFS) s'applique donc à chaque solide du mécanisme étudié. L'objectif est à la fois d'étudier la cinématique d'un mécanisme (relation entrée sortie) et les actions mécaniques entre les solides du système étudié. Chaque solide étant en contact avec un ou plusieurs autres, chaque liaison entre deux solides sera décrite par une des liaisons élémentaires présentées précédemment. On pourra donc tracer le graphe des liaisons.

5.2.1 Liaison équivalente (liaison en parallèle et liaison en série)

a) Définition

Supposons qu'il existe entre deux pièces S_1 et S_2 plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièces intermédiaires. La liaison équivalente à l'ensemble des liaisons situées entre les pièces S_1 et S_2 est la liaison théorique de référence L_{12} qui a le même comportement que cette association de liaisons, c'est à dire qui transmet la même action mécanique et qui autorise le même mouvement. Une illustration en terme de graphe des liaisons est donnée sur la figure 5.3, où les liaisons L_1, L_2, L_3 et L_4 ainsi que le système matériel S_3 sont équivalents cinématiquement et mécaniquement à la liaison L_{12}. Les liaisons qui peuvent exister entre les solides reliés sont soit en parallèle, soit en série. Voyons maintenant ce que cela implique comme condition sur les torseurs cinématiques et des actions mécaniques.

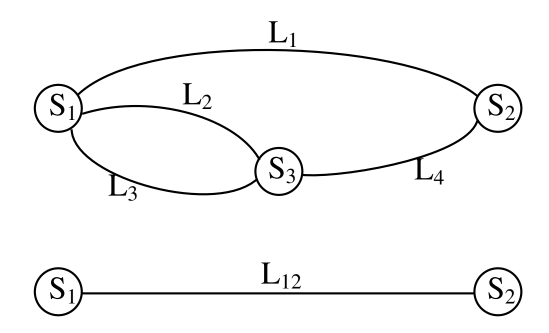


Figure 5.3 Exemple de liaison équivalente L_{12}.

b) Liaison en parallèle

On dit que n liaisons L_1, L_2, ..., L_i, ..., L_n sont disposées en parallèle entre deux solides S_1 et S_2 si chaque liaison relie directement ces deux solides. Une illustration en terme de graphe des liaisons est donnée sur la figure 5.4. Les composantes

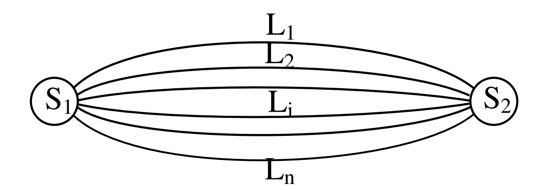


Figure 5.4 n liaisons en parallèle.

d'actions mécaniques transmissibles entre S_1 et S_2 sont l'ensemble des actions transmissibles par les liaisons L_i. En effet, par l'application du principe fondamental de la statique au solide S_2 par exemple, il vient immédiatement la relation suivante :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2) \right\}_M = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2) \right\}_M^{(i)},$$

où i représente la liaison L_i. Par conséquent, pour qu'une composante du torseur statique de la liaison équivalente ne soit pas nulle, il suffit qu'une seule composante correspondante d'une liaison L_i ne soit pas nulle. Pour obtenir le torseur cinématique de la liaison équivalente, il suffit d'écrire que le torseur cinématique de la liaison équivalente doit être compatible avec tous les torseurs cinématiques des liaisons L_i pour $i \in [1; n]$, c'est-à-dire

$$\left\{ \mathcal{V}(S_1/S_2) \right\} = \left\{ \mathcal{V}(S_1/S_2) \right\}_1 = \cdots = \left\{ \mathcal{V}(S_1/S_2) \right\}_n .$$

c) Liaison en série

n liaisons L_1, L_2, ..., L_i, ..., L_n sont disposées en série entre deux solides S_1 et S_n si elles sont disposées à la suite les unes des autres par l'intermédiaire de (n-1) solides (voir figure 5.5). On dit également que les (n+1) solides assemblés par les n liaisons en série constituent une chaîne continue ouverte. Les composantes d'actions méca-

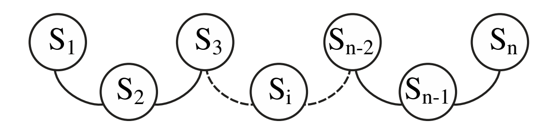


Figure 5.5 n liaisons en série.

niques transmissibles entre S_1 et S_n sont donc celles qui sont transmissibles simultanément par les liaisons L_i. En effet, si l'on applique le principe fondamental de la statique au système constitué du solide S_1, puis à celui constitué de (S_1, S_2), puis à (S_1, S_2, S_3), et ainsi de suite, puis en appliquant le principe fondamental de la statique à S_1 ayant une liaison équivalente avec S_n, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2) \right\} &= \left\{ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_3) \right\}_M \\ &\vdots \\ &= \left\{ \mathcal{A}(S_{i-1} \rightarrow S_i) \right\}_M, \forall M \\ &\vdots \\ &= \left\{ \mathcal{A}(S_{n-1} \rightarrow S_n) \right\}_M. \end{aligned}$$

Par conséquent, si une composante d'un torseur statique d'une liaison (L_i) est nulle, la composante correspondante du torseur statique de la liaison équivalente est nulle. Le torseur cinématique de la liaison équivalente peut être, quant à lui, obtenu en écrivant la relation de composition des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence :

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{V}(S_n/S_1) \right\} &= \left\{ \mathcal{V}(S_n/S_{n-1}) \right\}_M + \cdots + \left\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \right\}_M \\ &= \sum_{i=2}^{n} \left\{ \mathcal{V}(S_i/S_{i-1}) \right\}_M, \forall M. \end{aligned}$$

5.2.2 Hyperstatisme et mobilité

a) Degré d'hyperstatisme

On dit qu'un système est hyperstatique si le nombre des inconnues statiques présentes dans le système est supérieur au nombre d'équations indépendantes obtenues en isolant les différents solides. On définit alors le degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme comme la surabondance des liaisons constituant ce mécanisme. Ainsi, h est égal au

nombre total N_s d'inconnues statiques introduit par les liaisons moins le nombre r_s de relations indépendantes entre ces inconnues :

$$h = N_s - r_s.$$

Dans le cas d'un nombre d'inconnues statiques égal au nombre d'équations indépendantes ($h = 0$), le système est **isostatique**. Par exemple, un tabouret constitué de trois pieds non alignés est isostatique et une chaise ayant quatre pieds est hyperstatique.

b) Degré de mobilité

Le degré de mobilité m d'un mécanisme ou d'une liaison caractérise le nombre de mouvements indépendants possibles. Ce degré correspond donc au nombre de paramètres indépendants du torseur cinématique. Lorsque m est nul le mécanisme est immobile, lorsque $m > 0$ le mécanisme est mobile de mobilité m. On peut définir aussi la **mobilité utile** m_u comme la ou les mobilités souhaitées du mécanisme ou toute mobilité qui entraîne le mouvement de plusieurs pièces. Pour caractériser la mobilité d'une pièce indépendamment des autres on définit la **mobilité interne** m_i (par exemple, une bielle tournant sur elle-même entre deux rotules).

5.2.3 Étude des chaînes de solides parfaits (chaîne fermée, chaîne ouverte)

Suivant la manière dont sont agencés les solides à l'intérieur d'un mécanisme, on parle de chaîne ouverte, chaîne fermée ou complexe :

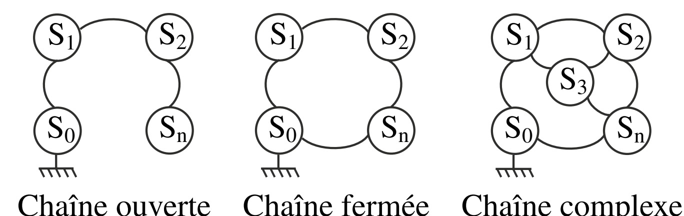


Figure 5.6 Différentes chaînes de solides.

a) Chaîne ouverte

Dans le cas d'une chaîne dite ouverte on a n + 1 solides en liaison les uns par rapport aux autres, chaque solide S_i étant en contact avec les solides i-1 et i+1. Il y a donc n liaisons entre les solides.

1. Analyse cinématique
   Par composition des mouvements, il vient immédiatement :

$$\{ \mathcal{V}(S_n/S_0) \} = \sum_{i=1}^{n} \{ \mathcal{V}(S_i/S_{i-1}) \} .$$

Nous aurons donc six équations scalaires pour un nombre N_c d'inconnues cinématiques indépendantes (la somme des inconnues de chaque torseur cinématique). Le degré de mobilité est donc égal à N_c. Il est à noter que si, pour une position donnée du solide n, des mouvements internes sont possibles, il y a alors un ou plusieurs degrés de mobilité interne qu'il convient généralement de minimiser ou d'éliminer (usure, vibrations).

2. Analyse statique
Par application successive du principe fondamental de la statique à l'ensemble des solides (de 1 à n), il vient :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_i \rightarrow S_{i-1}) \right\}_M = \left\{ \mathcal{A}(ext \rightarrow n) \right\}_M \quad \forall M \text{ et } \forall i \in [2;n],$$

où $\left\{ \mathcal{A}(ext \rightarrow n) \right\}_M$ représente le torseur des actions mécaniques extérieures appliqué au solide S_n au point M. Ce système d'équations portant sur des torseurs fournit 6n équations scalaires. La position d'équilibre peut toujours être trouvée et les inconnues de chaque torseur de liaison également. Le système est donc toujours **isostatique**.

b) Chaîne fermée

Il s'agit d'un cas très courant de mécanisme dont les solides sont reliés les uns aux autres par l'intermédiaire d'une seule liaison, excepté pour le bâti qui est en liaison avec le solide S_1 et le solide S_n.

1. Analyse cinématique
Par composition des mouvements, on peut écrire une relation entre les torseurs cinématiques :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_0/S_1) \right\}_M + \left\{ \mathcal{V}(S_1/S_2) \right\}_M + \cdots + \left\{ \mathcal{V}(S_n/S_0) \right\}_M = \{\mathcal{O}\} \quad \forall M. \quad (5.4)$$

Cette relation nous donne un système à six équations au plus indépendantes pour N_c inconnues cinématiques caractérisant les n + 1 liaisons entre les solides. Le degré de mobilité m de la chaîne fermée s'exprime donc de la manière suivante :

$$m = N_c - r_c,$$

avec r_c le nombre de relations indépendantes entre les inconnues cinématiques (correspondant au rang du système linéaire obtenu par l'équation 5.4). La quantité r_c est inférieure à N_c car il existe au moins un mouvement possible pour le système. Il est à noter que l'on peut avoir une mobilité interne supplémentaire telle que $m = m_u + m_i$.

2. Analyse statique
Par application successive du principe fondamental de la statique sur chacun des

solides S_i de la chaîne fermée, il vient pour tout point M :

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathcal{A}(S_0 \rightarrow S_1) \right\}_M + \left\{ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_1) \right\}_M &= \{\mathcal{O}\} \\
&\vdots \\
\left\{ \mathcal{A}(S_{i-1} \rightarrow S_i) \right\}_M + \left\{ \mathcal{A}(S_{i+1} \rightarrow S_i) \right\}_M &= \{\mathcal{O}\} \\
&\vdots \\
\left\{ \mathcal{A}(\text{ext} \rightarrow S_n) \right\}_M + \left\{ \mathcal{A}(S_{n-1} \rightarrow S_n) \right\}_M + \left\{ \mathcal{A}(S_0 \rightarrow S_n) \right\}_M &= \{\mathcal{O}\},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

où $\left\{ \mathcal{A}(\text{ext} \rightarrow S_n) \right\}_M$ représente le torseur des actions mécaniques extérieures appliqué au solide S_n au point M. Ce système d'équations fournit 6n équations pour N_s inconnues statiques (correspondant à la somme des inconnues associées à chaque torseur de liaison). Le degré d'hyperstatisme s'obtient donc par :

$$h = N_s - r_s, \tag{5.6}$$

avec r_s le nombre de relations indépendantes entre les inconnues statiques (correspondant au rang du système linéaire obtenu par les équations 5.5). Les $6n - r_s$ équations dites non principales du système d'équations correspondent en fait au nombre de relations cinématiques imposées. C'est donc la mobilité cinématique que l'on retrouve :

$$m = 6n - r_s. \tag{5.7}$$

Comme il est souvent fastidieux d'écrire toutes les équations de la statique, on peut analyser l'hyperstaticité du système par une simple approche cinématique. Comme le nombre total d'inconnues statiques et cinématiques est

$$N_c + N_s = 6(n + 1),$$

puisqu'il y a n + 1 liaisons entre les n solides et le bâti, il vient grâce aux relations (5.6) et (5.7) :

$$h = 6 + m - N_c. \tag{5.8}$$

Remarque

Dans le cas d'un problème plan, nous avons 3n équations provenant du système (5.5), ainsi que 3(n + 1) inconnues statiques et cinématiques. Il vient donc que la relation (5.8) devient $h = 3 + m - N_c$.



Nous proposons dans cet exemple de considérer le système bielle-manivelle classique. Le solide S_1 est en rotation (liaison pivot en C) à la vitesse $\mathbf{\Omega}(S_1/S_0) = \dot{\alpha}\,\mathbf{z}$, le solide S_2 est en liaison pivot en A (vitesse de rotation $\mathbf{\Omega}(S_2/S_0) = \dot{\beta}\,\mathbf{z}$) et le solide S_3 (un piston par exemple) est en translation le

long de l'axe (O, $\mathbf{x}$). Dans le cas général, la liaison entre le piston et le bâti est aussi de type pivot glissant (qui autorise une rotation et une translation) mais nous sommes dans le cas particulier d'un problème plan et par conséquent il ne reste comme mouvement possible que la translation.

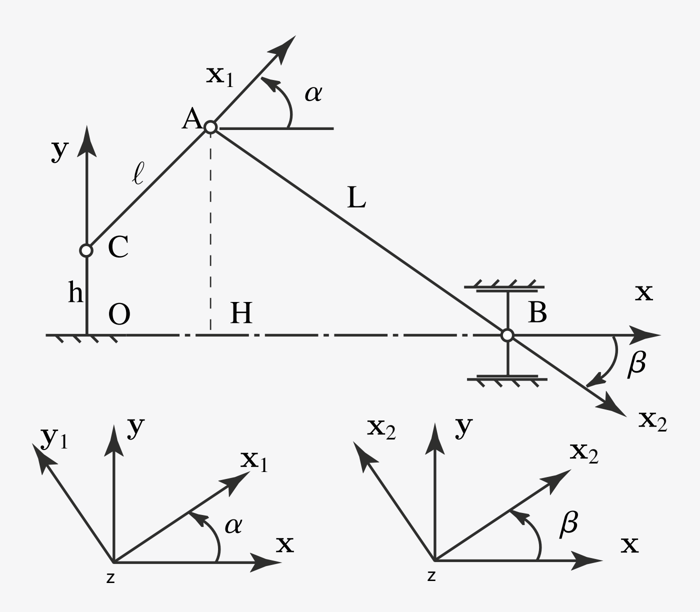


Figure 5.7 **Système bielle-manivelle.**

Le repérage pour S_1 est simple : l'angle α repère $\mathbf{x}_1$ par rapport à $\mathbf{x}$. Nous supposons que ce système est soumis à un couple ($\mathbf{C} = C\,\mathbf{z}$) en C et à un effort ($\mathbf{F} = F\,\mathbf{x}$) en B. Le graphe des actions mécaniques de ce système est représenté sur la figure 5.8. Nous sommes donc en présence d'une chaîne fermée dont on peut déterminer simplement le degré d'hyperstatisme. En effet, nous avons quatre inconnues cinématiques ($\Omega(S_0/S_1)$, $\Omega(S_1/S_2)$, $\Omega(S_2/S_3)$, $\mathbf{V}(B \in S_3/S_0)$) et trois relations indépendantes entre ces inconnues cinématiques, il vient donc que, comme le problème est plan, le système est isostatique ($h = 3 + 1 - 4 = 0$).

On peut vérifier le résultat en effectuant une analyse statique du système. Pour cela, nous appliquons le PFS aux trois solides constituant le système : S_1, S_2 et S_3, à l'équilibre. Nous avons donc :

- équilibre de S_1

$$\left\{\ \mathcal{A}(\mathbf{C} \rightarrow S_1)\ \right\}_C + \left\{\ \mathcal{A}(S_0 \rightarrow S_1)\ \right\}_C + \left\{\ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_1)\ \right\}_C = \{\mathcal{O}\}\ ;$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ C\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\,\mathbf{x} + Y_{01}\,\mathbf{y} \\ 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} X_{21}\,\mathbf{x} + Y_{21}\,\mathbf{y} \\ l(Y_{21}\cos\alpha - X_{21}\sin\alpha)\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_C = \{\mathcal{O}\}\ ;$$

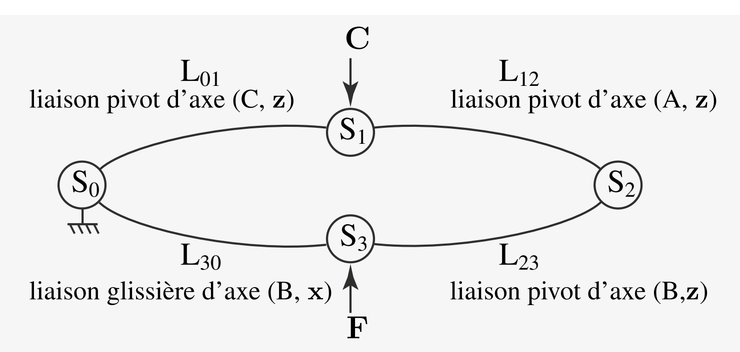


Figure 5.8 **Graphe des actions mécaniques (liaisons+efforts) de la bielle manivelle, (figure 5.7).**

- équilibre de S_2

$$\{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\ \}_A + \{\ \mathcal{A}(S_3 \rightarrow S_2)\ \}_A = \{\mathcal{O}\}\ ;$$

$$\left\{ \begin{array}{c} X_{12}\,\mathbf{x} + Y_{12}\,\mathbf{y} \\ 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} X_{32}\,\mathbf{x} + Y_{32}\,\mathbf{y} \\ L(\cos\beta Y_{32} + \sin\beta X_{32})\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_A = \{\mathcal{O}\}\,.$$

- équilibre de S_3

$$\{\ \mathcal{A}(\mathbf{F} \rightarrow S_3)\ \}_B + \{\ \mathcal{A}(S_0 \rightarrow S_3)\ \}_B + \{\ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_3)\ \}_B = \{\mathcal{O}\}\,;$$

$$\left\{ \begin{array}{c} F\,\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + Y_{03}\,\mathbf{y} \\ N_{03}\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} X_{23}\,\mathbf{x} + Y_{23}\,\mathbf{y} \\ 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_B = \{\mathcal{O}\}\,.$$

Nous obtenons donc neuf équations pour huit inconnues statiques (X_{01}, Y_{01}, X_{21}, Y_{21}, X_{32}, Y_{32}, Y_{03} et N_{03}), une équation est donc une combinaison linéaire des autres. Le rang r_s du système est donc de huit. On en déduit donc que le système est isostatique $h = 8 - 8$, retrouvant ainsi le résultat précédemment établi.



Torseur statique d'un solide S_1 sur un solide S_2

Il s'agit d'un torseur composé d'une résultante (de composantes X, Y, Z) et d'un moment (de composantes L, M, N) dans un repère R ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$), qui représentent la force et le moment produit par la force en un point P, contact entre les solides :

$$\{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\ \} = \left\{ \begin{array}{c} X\,\mathbf{x} + Y\,\mathbf{y} + Z\,\mathbf{z} \\ L\,\mathbf{x} + M\,\mathbf{y} + N\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_P .$$

Principe fondamental de la statique

Il existe un référentiel galiléen R_g tel que pour tout sous-système matériel s de l'ensemble de solides S_i en équilibre par rapport à R_g, le torseur des actions extérieures appliqué à ce sous-système est nul :

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{ext} \to \text{s}) \right\}_M = \{\mathcal{O}\} \quad \forall \text{s} \in S_i \quad \text{et} \quad \forall M,$$

avec $\{\mathcal{O}\}$ le torseur nul.

Théorème des actions réciproques

Considérons deux solides S_1 et S_2 en interaction à l'équilibre par rapport à un référentiel galiléen. Le torseur des actions exercées par S_1 sur S_2 est égal et opposé au torseur des actions de S_2 sur S_1 :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \to S_2) \right\}_M = -\left\{ \mathcal{A}(S_2 \to S_1) \right\}_M \quad \forall M.$$

Liaisons en parallèle

Le torseur des actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente à un exemple de liaisons en parallèle entre deux solides S_1 et S_2 est tel que :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \to S_2) \right\}_M = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathcal{A}(S_1 \to S_2) \right\}_M^{(i)},$$

avec i, la i^e liaison en parallèle, et n le nombre total de liaisons.

Liaisons en série

Le torseur cinématique de la liaison équivalente à un exemple de liaisons en série est tel que :

$$\left\{ \mathcal{V}(S_n/S_1) \right\} = \sum_{i=2}^{n} \left\{ \mathcal{V}(S_i/S_{i-1}) \right\},$$

où n est le nombre total de liaisons en série.

Degré d'hyperstatisme d'un mécanisme

$$h = N_s - r_s.$$

h : degré d'hyperstatisme.
N_s : nombre d'inconnues de liaison indépendantes introduit par les liaisons du mécanisme.
r_s : nombre de relations indépendantes entre les inconnues.

Degré de mobilité d'un mécanisme

$$m = N_c - r_c.$$

m : degré de mobilité.
N_c : nombre d'inconnues cinématiques indépendantes introduit par l'ensemble des liaisons du mécanisme.
r_c : nombre de relations indépendantes entre les inconnues cinématiques.

Exercices

5.1 Diable

Le diable est un système qui permet le transport de charges ($\mathbf{P} = -Mg\mathbf{y}$) importantes et ceci à moindre effort $\mathbf{F}$ de la part du manutentionnaire.
Un diable constitué d'un support de charge et d'une roue de rayon r est schématisé en vue de côté sur la figure 5.9. Deux repères lui sont associés. Un premier repère R $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ est lié à la base. Un second, R_1 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z})$ lié au diable, repère son orientation par rapport à R tel que $\alpha = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1)$. On note $\mathbf{AB} = a\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{BC} = b\mathbf{y}_1$.Dans la suite du problème, le poids du diable est négligé devant celui de la charge transportée.

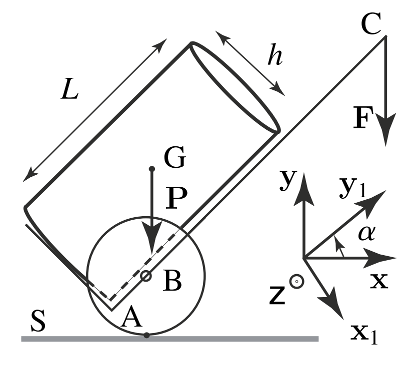


Figure 5.9 Paramétrisation du diable.

1) Dans un repère que vous choisirez, calculez le torseur résultant des efforts extérieurs appliqués au diable.
2) Pourquoi met-on en pratique le pied pour bloquer les roues ?
3) Calculez l'effort $\mathbf{F}$ et la réaction au sol en fonction des données géométriques.

5.2 Cadre de VTT

La qualité d'un Vélo Tout Terrain est liée à la rigidité de son cadre. Afin d'alléger la structure, le constructeur réduit au minimum la triangulation classique. Elle comprend ici trois barres ABCD, BE et CE, notées respectivement S_1, S_2 et S_3. L'ensemble de ces trois barres forme un solide rigide.

On se propose d'étudier l'état de sollicitation de la barre principale S_1. On suppose que l'action mécanique exercée par l'utilisateur sur le cadre se réduit à un glisseur (torseur statique de moment nul) de résultante verticale $P = 500$ N. On considère deux contacts ponctuels parfaits en I et J entre les roues S_4, S_5 et le sol S_0, deux liaisons pivots parfaites d'axe (A, $\mathbf{z}_0$) (entre la roue S_4 et la barre S_1) et (F, $\mathbf{z}_0$) (entre la roue S_5 et la barre-guidon S_6) et une liaison pivot parfaite d'axe (D, $\mathbf{y}$) (entre la barre S_1 et la barre-guidon S_6).

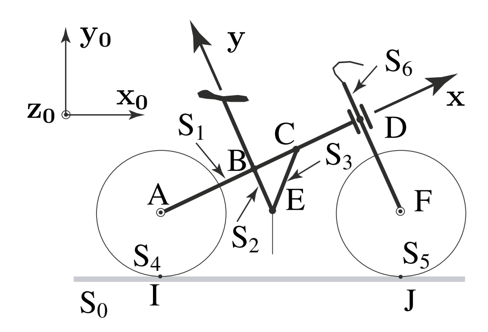


Figure 5.10 **Schéma du VTT.**

1) Étudier le torseur de chacune des cinq liaisons.
2) Appliquer le principe fondamental de la statique au VTT pour déterminer les réactions en I et J.
3) Déterminer les efforts des liaisons pivots en A et F.
4) Appliquer le principe fondamental de la statique au solide S_6 pour déterminer le torseur d'actions de S_6 sur S_1 en D (torseur de la liaison pivot en D) exprimé dans le repère $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}_0)$.

5.3 Pompe manuelle

On se propose d'étudier dans cet exercice une pompe manuelle composée de trois pièces S_1, S_2 et S_3 reliées à un bâti S_0. Le schéma cinématique de cette pompe est proposé figure 5.11. La pièce S_1 du dispositif est une tige de longueur R fixée qui s'articule au bâti S_0 grâce à une liaison pivot d'axe (O, $\mathbf{z}$). Sur cette pièce coulisse la pièce S_3 suivant une liaison glissière d'axe (D, $\mathbf{u}$). La pièce S_3 est articulée en D par une liaison rotule à une pièce S_2 liée au bâti par une liaison glissière d'axe (B, $\mathbf{y}$). Une force $\mathbf{F}$ est appliquée à l'extrémité E de la pièce 2. L'objet du problème est de

déterminer la charge $\mathbf{Q} = -Q\mathbf{v}$ appliquée en C pour une valeur fixée de l'angle $\phi = (\mathbf{x}, \mathbf{u})$. On pose $\mathbf{OC} = R\,\mathbf{u}$, $\mathbf{OB} = \ell\,\mathbf{x}$ où ℓ est fixée et $\mathbf{v} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{u}$.

1) Après avoir isolé la pièce S_3, faites l'inventaire des actions extérieures qui lui sont exercées. En appliquant le principe fondamental de la statique à cette pièce, déterminez les composantes suivant $\mathbf{y}$ de la résultante ($\mathbf{Y}_{13}$) et suivant $\mathbf{z}$ du moment de S_1 sur S_3 ($\mathbf{N}_{13}$).

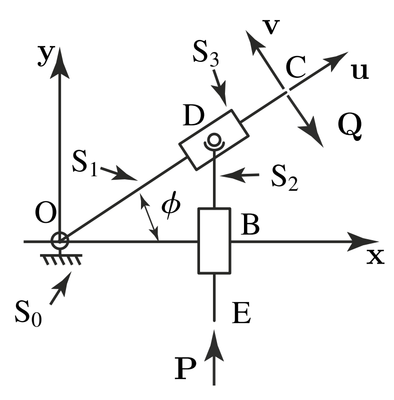


Figure 5.11 **Pompe manuelle.**

2) En appliquant la même méthode à la pièce S_2, montrez que $\mathbf{Y_{13}} = -\dfrac{p}{\cos\phi}\mathbf{v}$.

3) En appliquant la même méthode à la pièce S_3, montrer que $\mathbf{Q} = -\dfrac{\ell Y_{13}}{R\cos\phi}\mathbf{v}$.

4) En déduire la valeur de Q en fonction de P, R, ℓ et ϕ.

5.4 Gouvernail d'un voilier

Lors d'une navigation en ligne droite, le maintien de la trajectoire suppose, de la part du barreur, un effort constant sur le bras de manipulation du gouvernail. On désire connaître la valeur de cet effort dans une configuration simple : un gouvernail, constitué du safran et du bras de manipulation est relié au bateau par une liaison pivot d'axe (G, $\mathbf{z}$). On supposera que le bateau se déplace en translation rectiligne à vitesse constante, on pourra ainsi appliquer le principe fondamental de la statique. On supposera de plus que le poids du gouvernail est faible vis-à-vis des efforts qui lui sont appliqués. L'action de l'eau sur le safran est modélisée par une force ponctuelle $\mathbf{F}_{\text{eau}}$, appliquée en son milieu E : $\mathbf{F}_{\text{eau}} = -F_{\text{ex}}\mathbf{x} - F_{\text{ey}}\mathbf{y}$ avec F_{ex} et F_{ey} valeurs positives. L'action du barreur en H est notée $\mathbf{F}_{\text{barreur}} = F_{\text{b}}\mathbf{x}$. On donne : $\mathbf{GH} = d\mathbf{z} + \ell\mathbf{y}$ et $\mathbf{GE} = -D\mathbf{z} - L\mathbf{y}$ avec d, ℓ, D, L positives.

1) Que vaut l'action du barreur en fonction de celle de l'eau ?

2) Déterminer les efforts dans la liaison pivot en fonction de l'action de l'eau.

3) Application numérique pour : $D = 3d = 0,6$ m, $\ell = 3L = 1,05$ m, $F_{\text{ex}} = 40$ N et $F_{\text{ey}} = 10$ N.

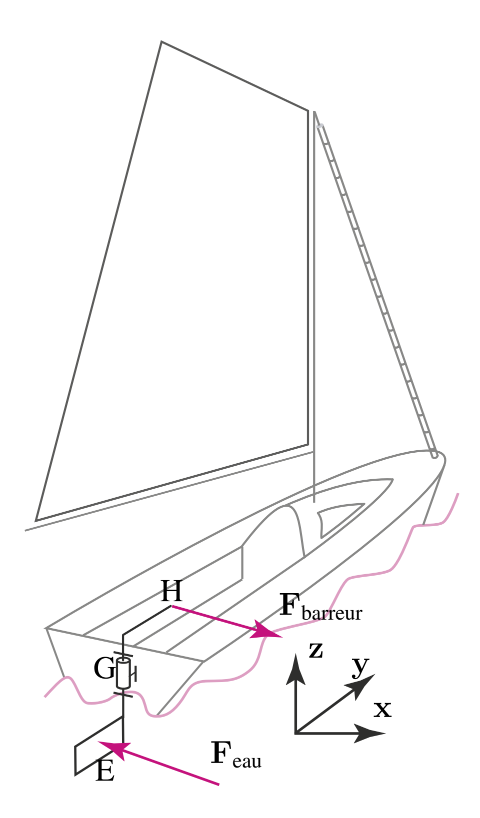


Figure 5.12 **Détail du gouvernail et les notations adoptées.**

5.5 Systèmes de freinage pour Vélo Tout Terrain (VTT)

On se propose d'étudier et de comparer les performances de deux systèmes de freinage pour VTT.

1) **Couple de freinage** Chacun des deux patins de frein exerce sur la jante de la roue un effort normal noté F_n. On suppose que le mécanisme est symétrique : $\mathbf{F}_{n_1} = -\mathbf{F}_{n_2}$. On note $||\mathbf{F}_{n_1}|| = ||\mathbf{F}_{n_2}|| = F_n$. On admettra que l'effort tangentiel induit est égal à $F_t = f \cdot F_n$ où f représente le coefficient de frottement caractéristique des deux matériaux (polymère à l'extrémité du patin et métallique de la jante en contact). De même on sait que la direction de $\mathbf{F}_t$ s'oppose à celle de la vitesse. Établir l'expression du couple de freinage C_f sur le moyeu de la roue en fonction des efforts F_n, du rayon R de la jante, du coefficient de frottement f et du sens du mouvement.

2) **Effort de freinage pour le frein Cantilever** Les patins de frein sont supposés soumis à un effort de compression simple entre d'une part la jante et d'autre part une biellette ou « étrier » de frein (ou « corps cantilever » !). L'extrémité inférieure de la biellette B_1 est fixée en G sur la fourche du vélo par une liaison pivot supposée parfaite (sans frottement). Le premier système de freinage étudié est tel que

l'extrémité supérieure de la biellette B_1 est soumise en F à l'action d'un fil de liaison. Les fils de liaison f_1 et f_2 fixés sur chacune des deux biellettes B_1 et B_2 sont fixés à leur autre extrémité à un anneau lui-même relié au câble de frein dont l'autre extrémité est fixée à la poignée de frein.

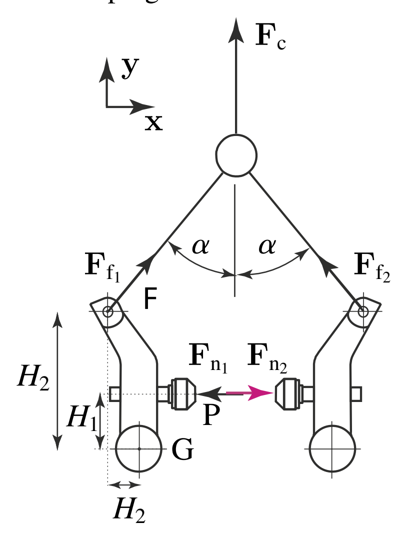


Figure 5.13 Frein Cantilever.

3) Établir l'expression de l'effort $F_c = \|\mathbf{F}_c\|$ dans le câble de frein en fonction de l'effort F_f dans les fils de liaison et de l'angle α en faisant l'hypothèse que le montage est parfaitement symétrique c'est-à-dire $\|\mathbf{F}_{f_1}\| = \|\mathbf{F}_{f_2}\| = F_f$.

4) Établir l'expression de l'effort F_f dans les fils de liaison en fonction de l'effort normal $F_n = \|\mathbf{F}_n\|$ appliqué par le patin et des dimensions H_1, H_2 et H_3.

5) **Câble de frein et poignée** Le câble de frein est fixé en A à la poignée de frein. La poignée de frein est fixée en B sur le guidon du vélo par une liaison pivot supposée parfaite (sans frottement). Établir l'expression de l'effort $F_m = \|\mathbf{F}_m\|$ exercé par la main sur la poignée en fonction de l'effort $F_c = \|\mathbf{F}_{cp}\|$ dans le câble de frein (l'intensité de l'effort est conservée le long du câble de frein), des dimensions L_1, L_2, L_3 ainsi que de l'angle β.

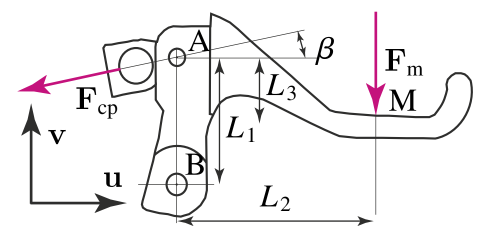


Figure 5.14 Poignée de frein.

6) **Relation entre $C_\mathbf{f}$ et $F_\mathbf{m}$ pour le frein Cantilever** À partir des relations établies en 1, 2 et 3, établir l'expression du couple de freinage C_f en fonction de l'effort F_m exercé par la main sur la poignée de frein.

7) **Effort de freinage pour le frein Shimano** Le deuxième système de freinage étudié est tel que l'extrémité supérieure de chaque biellette est soumise directement à l'effort $\mathbf{F}_\mathrm{c}^*$ ($\mathbf{F}_{\mathrm{f}_1} = \mathbf{F}_\mathrm{c}^*$) dans le câble de frein (l'extrémité inférieure de chaque biellette étant toujours fixée sur la fourche du vélo par une liaison pivot supposée parfaite et les patins de frein étant toujours supposés soumis à un effort de compression simple entre la jante et la biellette.) Établir l'expression de l'effort $F_\mathrm{c}^* = \|\mathbf{F}_\mathrm{c}^*\|$ dans le câble de frein en fonction de l'effort normal $F_\mathrm{n} = \|\mathbf{F}_\mathrm{n}\|$ appliqué par le patin et des dimensions H_1^* et H_2^*.

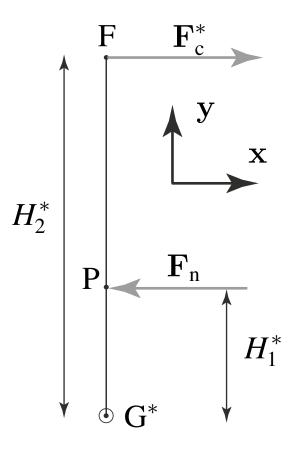


Figure 5.15 **Principe du frein Shimano.**

8) **Relation entre $C_\mathbf{f}^*$ et $F_\mathbf{m}$ pour le frein Shimano** À partir des relations établies en 1, 3 et 5, établir l'expression du couple de freinage C_f^* en fonction de l'effort F_m exercé par la main sur la poignée de frein.

9) **Comparaison des deux systèmes de frein** Comparer l'efficacité des deux systèmes de freinage (résultats établis en 4 et 6). Dans un premier temps, on supposera que $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ et que $H_1^* = H_1$. Dans un deuxième temps, on supposera que $H_2 = 85$ mm, $H_3 = 20$ mm et que $H_2^* = 120$ mm. Le graphe 5.16 donne la relation expérimentalement mesurée entre l'effort exercé sur la poignée $\mathbf{F}_\mathrm{m}$ et l'effort de serrage $\mathbf{F}_\mathrm{n}$.

10) **Conclusion** Comparer et commenter les résultats des modélisations avec les résultats expérimentaux.

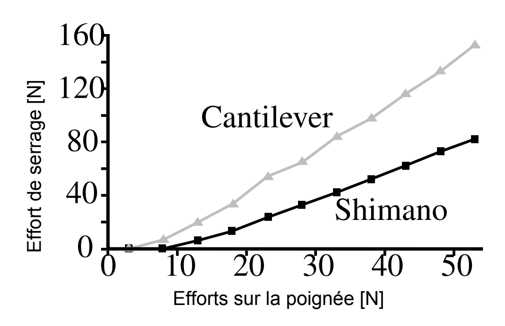


Figure 5.16 **Comparaison des deux systèmes de freinage.**

5.6 Étude statique d'un mouflage (exercice communiqué par R. Billardon)

On se propose d'étudier une technique de démultiplication d'effort, dite de mouflage, utilisable dans de multiples contextes, par exemple lors d'opérations de sauvetage ou d'assistance en montagne.

La figure 5.17 schématise la situation d'un chef de cordée qui doit hisser à son relais et à la seule force de ses bras son second accidenté qui ne peut plus escalader. La technique du mouflage, mise en œuvre ici dans sa version dite « triple », permet de démultiplier la force du sauveteur tout en ne nécessitant que des mousquetons et des cordes.

Il s'agit par la suite d'étudier la situation statique de la figure 5.18. Trois brins de corde supposés complètement indépendants sont étudiés : K_1, K_2 et K_3. Les ancrages A et A' sont des points fixes que le sauveteur a mis en place. Le brin K_1 est fixé à l'accidenté M et à un double mousqueton (autrement appelé dégaine) B dans lequel coulisse le brin K_2. Cette dégaine est supposée se comporter comme une poulie dont



Figure 5.17 **Utilisation du mouflage en paroi.**

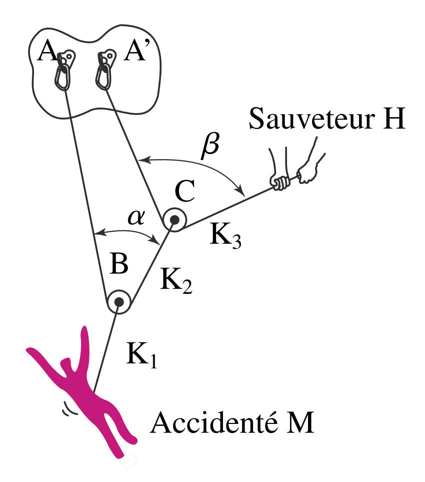


Figure 5.18 **Détail du système de mouflage triple.**

l'axe est relié à la corde K_1 et sur laquelle le brin K_2 roule sans frottement. Le brin K_2 est fixé à l'ancrage en A et à une deuxième dégaine C dans laquelle coulisse le brin K_3. Cette dégaine est supposée se comporter comme une poulie dont l'axe est relié à la corde K_2 et sur laquelle le brin K_3 roule sans frottement. Le brin K_3 est fixé à l'ancrage en A' (proche de A) et tiré par le sauveteur H qui exerce une force de module F. On note P le module de la force exercée sur le brin K_1 par l'accidenté M.

1) Que peut-on dire de la tension dans les parties [AB] et [BC] du brin de corde K_2 ? Que peut-on dire de la tension dans les parties [A'C] et [CH] du brin de corde K_3 ?

2) Isoler la poulie B, exprimer son équilibre et, dans un repère judicieux, calculer la tension $\mathbf{F}_2$ dans la corde K_2 en fonction de la force $\mathbf{P}$ et de l'angle α.

3) Isoler la poulie C, exprimer son équilibre et, dans un repère judicieux, calculer la tension $\mathbf{F}_2$ dans la corde K_2 en fonction de la force $\mathbf{F}$ et de l'angle β.

4) Donner alors la relation simple entre $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$ et les deux angles α et β.

5) En déduire les valeurs idéales des deux angles qui équilibrent $\mathbf{P}$ avec une force $\mathbf{F}$ d'amplitude minimale. Donner l'expression de cette force minimale $\mathbf{F}$ en fonction de la valeur de $\mathbf{P}$.

   Croyant aider le sauveteur, l'accidenté cherche à s'écarter de la paroi en s'appuyant sur ses jambes (figure 5.19). L'accidenté est supposé de masse m et la force qu'il exerce sur la paroi de manière à s'en écarter est notée $\mathbf{R}$, avec $\mathbf{R} = R\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ horizontal et $\mathbf{z}$ vertical ascendant. Par cette manœuvre, la corde prend un angle γ avec la surface du mur supposé vertical. L'accidenté est donc soumis à la réaction du mur, à son propre poids $\mathbf{M}$ et à la tension de module P dans le brin de corde K_1.

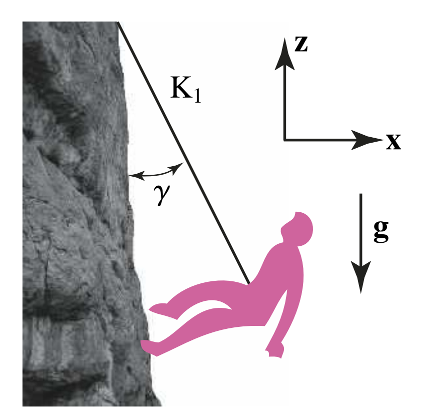


Figure 5.19 **Le second s'appuie sur le mur.**

6) Isoler l'accidenté, exprimer son équilibre et calculer l'effort $\mathbf{P}$ en fonction de la masse m et de l'angle γ. En déduire la valeur de la norme F de la force exercée par le sauveteur en fonction de la masse m et de l'angle γ. L'accidenté aide-t-il vraiment son premier de cordée ?

5.7 Étude d'un détendeur de plongée sous-marine

En plongée sous-marine, afin de pouvoir respirer sous l'eau et suffisamment longtemps, une bouteille est généralement gonflée à l'air à une pression avoisinant 200 bar (le bar est une unité couramment utilisée en plongée et correspond à 1 atmosphère, soit 10^5 Pa dans le système international). Le plongeur ne pouvant pas respirer une telle pression sans risque de lésion, un détendeur est vissé sur la robinetterie de la bouteille (figure 5.20). Comme son nom l'indique, il détend l'air pour le délivrer à



Figure 5.20 **Utilisation d'un détendeur de plongée sous-marine.**

la pression à laquelle se trouve le plongeur (la pression dépendant de la profondeur). Généralement constitué de deux étages, le premier détend l'air de la haute pression HP (200 bar) à une moyenne pression M_P (entre 6 et 12 bar), le deuxième détend l'air de la moyenne pression à la pression ambiante P_a à laquelle se trouve le plongeur. Lorsque le plongeur inspire, la membrane M s'abaisse à cause d'une rupture de l'équilibre des pressions (figure 5.21). Elle appuie sur le pointeau P qui modifie la direction du mouvement grâce à la liaison pivot en O et tire sur le clapet C en comprimant le ressort dont la force vaut F_r. Le clapet est en liaison pivot glissant avec le détendeur en D. L'air emplit alors la chambre et le plongeur peut respirer à sa guise. Lorsque le plongeur n'inspire plus, la membrane remonte et le ressort de rappel referme le clapet (figure 5.22). Lorsqu'il expire, une soupape d'expiration située vers le bas du détendeur s'écarte pour laisser échapper l'air vers l'extérieur.

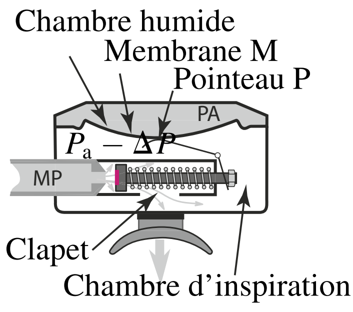


Figure 5.21 **Deuxième étage d'un détendeur lors de l'inspiration d'un plongeur.**

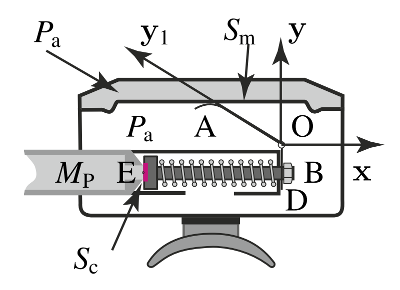


Figure 5.22 **Deuxième étage d'un détendeur à l'équilibre.**

L'objectif de cet exercice est de déterminer en fonction des données du constructeur la sensibilité du deuxième étage d'un détendeur à clapet « aval » dont le principe de fonctionnement est exposé sur les figures 5.21 et 5.22.

La moyenne pression M_P s'applique sur le clapet suivant une surface S_c de centre E. La surface des rebords est négligeable devant S_c. La pression ambiante P_a (résultant de l'action de l'eau à la profondeur considérée) s'applique sur la membrane suivant une surface S_m. Le pointeau P est en liaison pivot de centre O avec le détendeur. Il est en contact ponctuel avec le boulon du clapet en B. On note $\mathbf{OA} = a\mathbf{y}_1$ dans le repère R_1 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ lié au pointeau et $\mathbf{OB} = -b\mathbf{y}$, dans le cas particulier étudié, R $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ étant lié au détendeur. Un ressort de force de rappel F_r tend à fermer le clapet sur le siège de la chambre M_P.

1) Calculer la force due à l'action de l'eau sur la membrane.
2) Calculer la force due à la dépression de la chambre d'inspiration sur la membrane.
3) En isolant le pointeau, calculer la force exercée en B par l'action de l'eau et de la dépression interne sur la membrane. On supposera le clapet fermé.
4) Dans le cas de la figure 5.21, et en considérant que le clapet est fermé, calculer la sensibilité du détendeur, c'est à dire ΔP, en fonction des pressions en présence. On négligera S_c devant S_m.
5) Où le plongeur devra t-il fournir le plus d'effort inspiratoire : au fond ou à la surface ?

Solutions des exercices

5.1 Diable

1) Le système considéré est le diable. Il s'agit de recenser les torseurs qui lui sont extérieurs :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Charge} \rightarrow \text{Diable})\ \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}_{\mathrm{G}},\ \left\{\ \mathcal{A}(\text{Sol} \rightarrow \text{Diable})\ \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}_{\mathrm{B}},$$

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Main} \rightarrow \text{Diable})\ \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}_{\mathrm{C}}.$$

Le torseur résultant noté $\left\{\ \mathcal{A}(\text{Résultant} \rightarrow \text{Diable})\ \right\}$ peut être obtenu par la somme des autres torseurs au même point par exemple B :

- Torseur de la charge sur le diable exprimé en B

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Charge} \rightarrow \text{Diable})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{G}} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg\mathbf{y} \\ -Mg\mathbf{y} \wedge \mathbf{GB} \end{array} \right\}_{\text{B}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -Mg\mathbf{y} \\ Mg(\frac{h}{2}\sin\alpha - \frac{L}{2}\cos\alpha + a\cos\alpha)\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\text{B}}.$$

puisque $\mathbf{GB} = \mathbf{GA} + \mathbf{AB} = \frac{h}{2}\mathbf{x}_1 - \frac{L}{2}\mathbf{y}_1 + a\mathbf{y}_1$ avec $\mathbf{x}_1 = \sin\alpha\mathbf{x} - \cos\alpha\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}_1 = \cos\alpha\mathbf{x} + \sin\alpha\mathbf{y}$.

- Torseur de l'action de la main exprimé en B

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Main} \rightarrow \text{Diable})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{C}} = \left\{ \begin{array}{c} -F\mathbf{y} \\ -F\mathbf{y} \wedge \mathbf{CB} \end{array} \right\}_{\text{B}} = \left\{ \begin{array}{c} -F\mathbf{y} \\ -Fb\cos\alpha\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\text{B}},$$

avec $\mathbf{CB} = -b\mathbf{y}_1$.

- Torseur de l'action du sol sur la roue en B

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Roue} \rightarrow \text{Diable})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{S}} = \left\{ \begin{array}{c} R_y\mathbf{y} \\ 0 \end{array} \right\}_{\text{B}},$$

avec $\mathbf{SB} = r\mathbf{y}$.

Torseur résultant en B :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Résultant} \rightarrow \text{Diable})\ \right\} = \left\{\ \mathcal{A}(\text{Charge} \rightarrow \text{Diable})\ \right\}_{\text{B}} + \left\{\ \mathcal{A}(\text{Main} \rightarrow \text{Diable})\ \right\}_{\text{B}} + \left\{\ \mathcal{A}(\text{Sol} \rightarrow \text{Diable})\ \right\}_{\text{B}}.$$

En projection sur les 3 axes du repère de base, le torseur résultant s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} /\mathbf{x} : 0. \\ /\mathbf{y} : -Mg + R_y - F. \\ /\mathbf{z} : Mg(\frac{h}{2}\sin\alpha - \frac{L}{2}\cos\alpha + a\cos\alpha) - Fb\cos\alpha. \end{array} \right.$$

2) Il existe un moment B qui n'est pas nul qui a donc tendance à faire tourner la roue et à faire avancer le diable.

3) En considérant le diable comme le système, le PFS appliqué en B s'écrit :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Sol} \rightarrow \text{Diable})\ \right\}_{\text{B}} + \left\{\ \mathcal{A}(\text{Charge} \rightarrow \text{Diable})\ \right\}_{\text{B}} + \left\{\ \mathcal{A}(\text{Main} \rightarrow \text{Diable})\ \right\}_{\text{B}} = \{\mathcal{O}\},$$

soit en projection sur les axes de la base, la résultante du PFS s'écrit au point B :

$$\left\{ \begin{array}{l} /\mathbf{x} : 0. \\ /\mathbf{y} : -Mg + R_y - F = 0. \\ /\mathbf{z} : Mg(\frac{h}{2}\sin\alpha - \frac{L}{2}\cos\alpha + a\cos\alpha) - Fb\cos\alpha = 0. \end{array} \right.$$

Soit :

$$F = Mg\left(\frac{h}{2b}\tan\alpha - \frac{L}{2b} + \frac{a}{b}\right),$$

et :

$$R_y = P + Mg\left(\frac{h}{2b}\tan\alpha - \frac{L}{2b} + \frac{a}{b}\right).$$

5.2 Cadre de VTT

Il s'agit d'un problème plan, défini dans le plan (A, $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{y_0}$). Par conséquent la composante de la résultante selon $\mathbf{z_0}$ et les composantes du moment selon $\mathbf{x_0}$ et $\mathbf{y_0}$ sont nulles.

1) Torseur de l'action mécanique en I de S_0 sur S_4 :

$$\left\{\ \mathcal{A}(S_0 \rightarrow S_4)\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{04}\,\mathbf{y} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{I}};$$

Torseur de l'action mécanique en J de S_0 sur S_5 :

$$\left\{\ \mathcal{A}(S_0 \rightarrow S_5)\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{05}\,\mathbf{y} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{J}};$$

Torseur de l'action mécanique en A de S_4 sur S_1 :

$$\left\{\ \mathcal{A}(S_4 \rightarrow S_1)\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{41}\,\mathbf{x} + Y_{41}\,\mathbf{y} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{A}};$$

Torseur de l'action mécanique en F de S_6 sur S_5 :

$$\left\{\ \mathcal{A}(S_6 \rightarrow S_5)\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{65}\,\mathbf{x} + Y_{65}\,\mathbf{y} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{F}};$$

Torseur de l'action mécanique en D de S_1 sur S_6 :

$$\left\{\ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_6)\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{61}\,\mathbf{x} + Y_{61}\,\mathbf{y} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + N_{61}\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{D}}.$$

2) On isole le VTT $= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$. Le bilan des actions mécaniques extérieures nous donne :

- action du cycliste en E ;
- actions de S_0 sur S_4 par la liaison ponctuelle en I ;
- actions de S_0 sur S_5 par la liaison ponctuelle en J.

Après avoir exprimé tous les torseurs en E, on peut appliquer le PFS au VTT en E. La projection de la résultante selon $\mathbf{y_0}$ devient : $-P + Y_{04} + Y_{05} = 0$. et la projection du moment en E selon $\mathbf{z_0}$ est : $-d_{AE}Y_{04} + d_{FE}Y_{05} = 0$.

En utilisant le théorème de Thalès pour exprimer les rapports de longueur, on obtient :

$$Y_{04} = \frac{d_{BD}}{d_{AD}} P \quad \text{et} \quad Y_{05} = \frac{d_{AB}}{d_{AD}} P.$$

3) On isole la roue S_4. Le bilan des actions mécaniques extérieures nous donne :

- action de S_0 sur S_4 par la liaison ponctuelle en I ;
- action de S_1 sur S_4 par la liaison pivot en A.

Après avoir exprimé tous les torseurs en A, on peut appliquer le PFS à S_4 en A. La projection de la résultante selon $\mathbf{x_0}$ est : $X_{14} = 0$ et la projection de la résultante selon $\mathbf{y_0}$ devient : $Y_{04} = -Y_{14} = -\dfrac{d_{BD}}{d_{AD}} P$. Par analogie, en isolant la roue S_5 : $X_{65} = 0$ et $Y_{65} = -Y_{05} = -\dfrac{d_{AB}}{d_{AD}} P$.

4) On isole la barre-guidon S_6. Le bilan des actions mécaniques extérieures nous donne :

- action de S_1 sur S_6 par la liaison pivot en D ;
- action de S_5 sur S_6 par la liaison pivot en F (utiliser le principe des actions mutuelles).

Après avoir exprimé tous les torseurs en D, on peut appliquer le PFS à S_6 en D. La projection de la résultante selon $\mathbf{x_0}$ est : $X_{16} = 0$, la projection de la résultante selon $\mathbf{y_0}$: $Y_{16} = -Y_{56} = Y_{65} = -\dfrac{d_{AB}}{d_{AD}} P$ et la projection du moment en D selon $\mathbf{z_0}$: $N_{16} = d_{FD'} Y_{65} = d_{FD'} \left(-\dfrac{d_{AB}}{d_{AD}} P\right)$, où D′ est la projection de D sur (A,$\mathbf{x_0}$).

5.3 Pompe manuelle

Cet exercice est un problème plan. Il vient donc que nous considérerons par la suite, uniquement les deux composantes de la résultante des efforts dans le plan ($\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$) et la composante du moment suivant l'axe $\mathbf{z}$.

1) Sur la pièce S_3 s'exerçent les actions extérieures de S_2 par une liaison rotule et de S_1 par une liaison glissière, le poids étant considéré négligeable. Nous avons donc :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_3) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0\,\mathbf{u} + Y_{13}\,\mathbf{v} \\ N_{13}\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_D ,$$

$$\left\{ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_3) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{23}\,\mathbf{u} + Y_{23}\,\mathbf{v} \\ 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_D .$$

Le principe fondamental de la statique appliqué à la pièce S_3 en D s'exprime par :

$$\left\{ \mathcal{A}(\overline{S}_3 \rightarrow S_3) \right\}_D = \left\{ \mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_3) \right\}_D + \left\{ \mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_3) \right\}_D = \{\mathcal{O}\} ,$$

il vient immédiatement en projection suivant les axes $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_{23} & = & 0. \\ Y_{13} & = & -Y_{23}. \\ N_{13} & = & 0. \end{array}\right.$$

2) Sur la pièce S_2 s'exerçent les actions extérieures de S_3 par une liaison rotule, de S_0 par une liaison glissière d'axe (B, $\mathbf{y}$) et la force $\mathbf{P}$ à l'extrémité E. Nous avons donc :

$$\begin{array}{rcl} \{\ \mathcal{A}(S_3 \rightarrow S_2)\ \} & = & \left\{\begin{array}{c} 0\,\mathbf{u} + Y_{32}\,\mathbf{v} \\ 0\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_{\mathrm{D}}, \\ \{\ \mathcal{A}(S_0 \rightarrow S_2)\ \} & = & \left\{\begin{array}{c} X_{02}\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} \\ N_{02}\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_{\mathrm{B}}, \\ \{\ \mathcal{A}(\mathbf{P} \rightarrow S_2)\ \} & = & \left\{\begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + P\,\mathbf{y} \\ 0\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_{\mathrm{E}}. \end{array}$$

En appliquant le principe fondamental de la statique à la pièce S_2 en D (ne pas oublier de se placer dans le même repère), il vient :

$$\{\ \mathcal{A}(\overline{S}_2 \rightarrow S_2)\ \}_{\mathrm{D}} = \{\mathcal{O}\},$$

et donc

$$\begin{array}{rcl} \{\ \mathcal{A}(S_3 \rightarrow S_2)\ \}_{\mathrm{D}} + \{\ \mathcal{A}(S_0 \rightarrow S_2)\ \}_{\mathrm{D}} + \{\ \mathcal{A}(\mathbf{P} \rightarrow S_2)\ \}_{\mathrm{D}} & = & \{\mathcal{O}\} \\ \left\{\begin{array}{c} 0\,\mathbf{u} + Y_{32}\,\mathbf{v} \\ 0\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_{\mathrm{D}} + \left\{\begin{array}{c} X_{02}\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} \\ N_{02} - \ell \tan\phi X_{02}\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_{\mathrm{D}} + \left\{\begin{array}{c} 0\,\mathbf{x} + P\,\mathbf{y} \\ 0\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_{\mathrm{D}} & = & \{\mathcal{O}\}, \end{array}$$

il vient immédiatement en projection suivant $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -Y_{32}\sin\phi + X_{02} & = & 0. \\ Y_{32}\cos\phi + P & = & 0. \\ N_{02} - \ell\tan\phi X_{02} & = & 0. \end{array}\right.$$

En utilisant les résultats issus de la question précédente, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_{02} & = & -P\tan\phi. \\ Y_{32} & = & -\dfrac{P}{\cos\phi}. \\ N_{02} & = & -P\ell\tan\phi^2. \end{array}\right.$$

3) Sur la pièce S_1 s'exerçent les actions extérieures de S_0 par une liaison pivot, de S_3 par une liaison glissière d'axe $(D,\mathbf{u})$ et la force $\mathbf{Q}$ en C. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\left\{\ \mathcal{A}(S_0 \to S_1)\ \right\} &= \left\{\begin{array}{c} X_{01}\,\mathbf{u} + Y_{01}\,\mathbf{v} \\ 0\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_{O}.\\ \left\{\ \mathcal{A}(S_3 \to S_1)\ \right\} &= \left\{\begin{array}{c} 0\,\mathbf{u} + Y_{31}\,\mathbf{v} \\ N_{31}\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_{D}.\\ \left\{\ \mathcal{A}(\mathbf{Q} \to S_1)\ \right\} &= \left\{\begin{array}{c} 0\,\mathbf{u} + (-)Q\,\mathbf{v} \\ 0\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_{C}.\end{aligned}$$

En appliquant le principe fondamental de la statique à la pièce S_1 en D, il vient :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\overline{S}_1 \to S_1)\ \right\}_D = \{\mathcal{O}\},$$

et donc

$$\left\{\ \mathcal{A}(S_0 \to S_1)\ \right\}_D + \left\{\ \mathcal{A}(S_3 \to S_1)\ \right\}_D + \left\{\ \mathcal{A}(\mathbf{Q} \to S_1)\ \right\}_D = \{\mathcal{O}\},$$

$$\left\{\begin{array}{c} X_{01}\,\mathbf{u} + Y_{01}\,\mathbf{v} \\ -\dfrac{\ell Y_{01}}{\cos\phi}\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_D + \left\{\begin{array}{c} 0\,\mathbf{u} + Y_{31}\,\mathbf{v} \\ N_{31}\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_D + \left\{\begin{array}{c} 0\,\mathbf{u} + -Q\,\mathbf{v} \\ -Q\left(R - \dfrac{\ell}{\cos\phi}\right)\,\mathbf{z} \end{array}\right\}_D = \{\mathcal{O}\},$$

il vient immédiatement en projection suivant $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{z}$:

$$\left\{\begin{aligned} X_{01} &= 0.\\ Y_{01} + Y_{31} - Q &= 0.\\ -\frac{\ell Y_{01}}{\cos\phi)} + N_{31} - Q\left(R - \frac{\ell}{\cos\phi}\right) &= 0.\end{aligned}\right.$$

Nous savons, de plus, d'après la question 1, que $N_{13} = 0$. Il vient donc :

$$-\frac{\ell}{\cos\phi)}(Q - Y_{31}) - Q\left(R - \frac{\ell}{\cos\phi}\right) = 0,$$

ou encore

$$\mathbf{Q} = \frac{\ell Y_{31}}{R\cos\phi}\mathbf{v},$$

puisque la force $\mathbf{Q}$ est portée par l'axe $\mathbf{v}$.

4) D'après les résultats des questions 2 et 3, il vient immédiatement :

$$Q = \frac{\ell P}{R\cos^2\phi}.$$

5.4 Gouvernail d'un voilier

1) Isolons le gouvernail S et faisons un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à celui-ci :

- action du barreur sur S : $\left\{ \mathcal{A}(\mathbf{F}_{\mathrm{b}} \rightarrow S) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_b\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{H}}$;
- action de l'eau sur S : $\left\{ \mathcal{A}(\mathbf{F}_{\mathrm{e}} \rightarrow S) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} (-)F_{ex}\,\mathbf{x} + (-)F_{ey}\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{E}}$;
- effort de liaison en G : $\left\{ \mathcal{A}(\mathrm{S}_0 \rightarrow S) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\,\mathbf{x} + Y_{01}\,\mathbf{y} + Z_{01}\,\mathbf{z} \\ L_{01}\,\mathbf{x} + M_{01}\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{G}}$.

Appliquons maintenant le principe fondamental de la statique en G :

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathcal{A}(\overline{\mathrm{S}} \rightarrow S) \right\}_{\mathrm{G}} &= \{\mathcal{O}\} \\
\left\{ \mathcal{A}(\overline{\mathrm{S}} \rightarrow S) \right\}_{\mathrm{G}} &= \left\{ \mathcal{A}(\mathbf{F}_{\mathrm{b}} \rightarrow S) \right\}_{\mathrm{G}} + \left\{ \mathcal{A}(\mathbf{F}_{\mathrm{e}} \rightarrow S) \right\}_{\mathrm{G}} + \left\{ \mathcal{A}(\mathrm{S}_0 \rightarrow S) \right\}_{\mathrm{G}} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} F_{\mathrm{b}}\,\mathbf{x} + 0\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ 0\,\mathbf{x} + F_{\mathrm{b}}d\,\mathbf{y} + (-)F_{\mathrm{b}}\ell\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{G}} \\
&\quad + \left\{ \begin{array}{c} (-)F_{\mathrm{ex}}\,\mathbf{x} + (-)F_{\mathrm{ey}}\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \\ (-)F_{\mathrm{ey}}D\,\mathbf{x} + F_{\mathrm{ex}}D\,\mathbf{y} + (-)LF_{\mathrm{ex}}\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{E}} \\
&\quad + \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\,\mathbf{x} + Y_{01}\,\mathbf{y} + Z_{01}\,\mathbf{z} \\ L_{01}\,\mathbf{x} + M_{01}\,\mathbf{y} + 0\,\mathbf{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{G}}.
\end{aligned}$$

En projection sur le repère $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F_{\mathrm{b}} - F_{\mathrm{ex}} + X_{01} &=& 0. \\ -F_{\mathrm{ey}} + Y_{01} &=& 0. \\ Z_{01} &=& 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -F_{\mathrm{ey}}D + L_{01} &=& 0. \\ F_{\mathrm{b}}d + F_{\mathrm{ex}}D + M_{01} &=& 0. \\ -F_{\mathrm{b}}\ell - LF_{\mathrm{ex}} &=& 0. \end{array} \right.$$

Nous obtenons donc maintenant l'action du barreur en fonction de celle de l'eau :

$$F_{\mathrm{b}} = -\frac{L}{\ell}F_{\mathrm{ex}}.$$

2) En remplacant l'expression de la force du barreur F_{b} dans le système d'équations, nous obtenons les composantes du torseur de la liaison pivot :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{01} &=& \left(\dfrac{L}{\ell} + 1\right) F_{\mathrm{ex}}. \\ Y_{01} &=& F_{\mathrm{ey}}. \\ Z_{01} &=& 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_{01} & = & F_{ey}D. \\ M_{01} & = & \left(\dfrac{L}{\ell}d - D\right)F_{ex}. \end{array}\right.$$

3) avec les applications numériques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_{01} & = & 66,7 \text{ N}. \\ Y_{01} & = & 10 \text{ N}. \\ Z_{01} & = & 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_{01} & = & 6 \text{ Nm}. \\ M_{01} & = & -26,7 \text{ Nm}. \end{array}\right.$$

5.5 Systèmes de freinage de Vélo Tout Terrain

1) Un couple est un torseur d'effort de résultante $\mathbf{F}$ nulle et de moment $\mathbf{M}$ non nul. Le couple de freinage calculé au point O est créé par l'action des deux patins P_1 et P_2 sur la jante de la roue. L'action des patins $\mathbf{F}_{P_1}$ et $\mathbf{F}_{P_2}$ est régie par la loi de Coulomb qui lie la composante normale $\mathbf{F}_n$ à la composante tangentielle (ou force de frottement) $\mathbf{F}_t$.

$$\mathbf{F}_{P_1} = F_n\mathbf{x} - F_t\mathbf{z}\,;\ \mathbf{F}_{P_2} = -F_n\mathbf{x} - F_t\mathbf{z}.$$

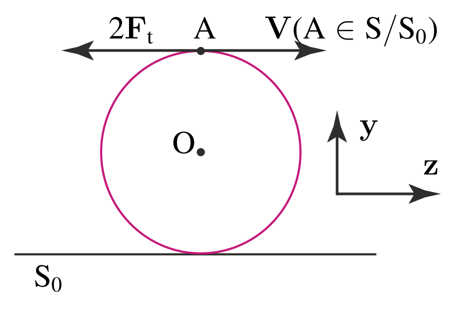


Figure 5.23 Couple de freinage.

Chaque patin exerce un force tangentielle et une force normale à la jante. Les composantes normales des deux patins sont opposées et s'appliquent au même point A elles ne participent donc pas au couple de freinage. Les composantes tangentielles des deux patins en revanche sont dirigées à l'opposé de la vitesse et s'additionnent. La force de frottement résultante est donc de $2\mathbf{F}_t$ et le moment engendré par cette force au point O est égal à : $\mathbf{M}(O, 2\mathbf{F}_t) = -2F_t\mathbf{z} \wedge (-R)\mathbf{y} = -2RF_t\mathbf{x}$. Or, la loi de Coulomb dans la phase de glissement nous donne $F_t = fF_n$. Le couple de freinage s'exprime donc : $C_f = 2fRF_n$.

2) On isole l'anneau. On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures exercées sur l'anneau :
   - force exercée par la câble de frein : $\mathbf{F}_c$;
   - force exercée par le fil de liaison f_1 : $\mathbf{F}_{f_1}$;
   - force exercée par le fil de liaison f_2 : $\mathbf{F}_{f_2}$,

   avec $||\mathbf{F}_{f_1}|| = ||\mathbf{F}_{f_2}|| = F_f$. Le Principe Fondamental de la Statique appliqué à la résultante des efforts donne : $\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{f_1} + \mathbf{F}_{f_2} = \mathbf{0}$. En projection sur (O, $\mathbf{y}$), il vient : $F_c = 2F_f \cos\alpha$.
3) On isole à présent la biellette B_1. On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur la biellette B_1 :
   - force exercée par la roue sur la biellette par l'intermédiaire du patin en P : $-\mathbf{F}_{p_1}$, torseur associé :

   $$\left\{ \mathcal{A}(\text{Roue} \to B_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_n\,\mathbf{x} + F_t\,\mathbf{z} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_P ;$$

   - efforts transmis par la liaison pivot d'axe (G, $\mathbf{z}$) en G, torseur associé :

   $$\left\{ \mathcal{A}(\text{Fourche} \to B_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_G\,\mathbf{x} + Y_G\,\mathbf{y} + Y_G\,\mathbf{z} \\ L_G\,\mathbf{x} + M_G\,\mathbf{y} \end{array} \right\}_G ;$$

   - force exercée par le fil de liaison f_1 en F, torseur associé :

   $$\left\{ \mathcal{A}(f_1 \to B_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_f \sin\alpha\,\mathbf{x} + F_f \cos\alpha\,\mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_F .$$

   On applique le principe fondamental de la statique sur les moments au point G que l'on projettera sur (O, $\mathbf{z}$). Pour cela il nous faut exprimer tous les moments des différentes actions extérieures au point G.
   - Moment en G de $\mathbf{F}_{f_1}$:

   $$\begin{aligned} \mathbf{M}(G, \mathbf{F}_{f_1}) &= \mathbf{F}_{f_1} \wedge \mathbf{FG}\,; \\ \mathbf{M}(G, \mathbf{F}_{f_1}) &= (F_f \sin\alpha\,\mathbf{x} + F_f \cos\alpha\,\mathbf{y}) \wedge (H_3\,\mathbf{x} + (-H_2)\,\mathbf{y})\,; \\ \mathbf{M}(G, \mathbf{F}_{f_1}) &= (-F_f \sin\alpha H_2 - F_f \cos\alpha H_3)\,\mathbf{z}. \end{aligned}$$

   - Moment en G de $-\mathbf{F}_{p_1}$:

   $$\begin{aligned} \mathbf{M}(G, -\mathbf{F}_{p_1}) &= -\mathbf{F}_p \wedge \mathbf{PG}\,; \\ \mathbf{M}(G, -\mathbf{F}_{p_1}) &= (-F_n\mathbf{x} + F_t\mathbf{z}) \wedge (\bullet\mathbf{x} + (-H_1)\mathbf{y})\,; \\ \mathbf{M}(G, -\mathbf{F}_{p_1}) &= \bullet\mathbf{x} + \bullet\mathbf{y} + F_{nH_1}\,\mathbf{z}, \end{aligned}$$

avec les • correspondant aux composantes qui n'ont pas besoin d'être calculées. On applique le principe fondamental de la statique sur les moments au point G en les projetant sur l'axe (O, **z**) : $F_{nH_1} - F_f \sin\alpha H_2 - F_f \cos\alpha H_3 = 0$, d'où :

$$F_f = \frac{F_{n\,H_1}}{H_2 \sin\alpha + H_3 \cos\alpha}.$$

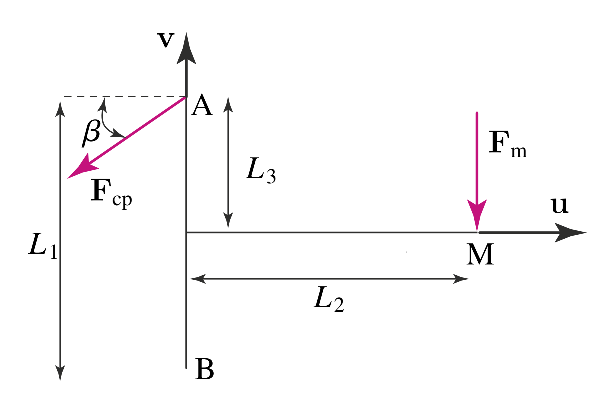


Figure 5.24 Poignée de frein.

4) On suit toujours la même méthodologie : après avoir isolé la poignée, on effectue un bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur celle-ci :

- action du guidon sur la poignée par la liaison pivot en B, torseur associé :

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{Guidon} \rightarrow \text{Poignée}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_B\,\mathbf{u} + Y_B\,\mathbf{v} + Z_B\,\mathbf{z} \\ L_B\,\mathbf{u} + M_B\,\mathbf{v} \end{array} \right\}_B ;$$

- action de l'utilisateur sur la poignée en M : $\mathbf{F}_m = -F_m\mathbf{v}$, torseur associé :

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{Utilisateur} \rightarrow \text{Poignée}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_m\,\mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_M ;$$

- action du câble sur la poignée en A : $\mathbf{F}_{cp} = -F_c \cos\beta\,\mathbf{u} - F_c \sin\beta\,\mathbf{v}$, torseur associé :

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{Câble} \rightarrow \text{Poignée}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_c \cos\beta\,\mathbf{u} - F_c \sin\beta\,\mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_A .$$

Principe fondamental de la statique appliqué en B :

$$\sum \left\{ \mathcal{A}(\text{ext} \rightarrow \text{Poignée}) \right\}_B = \{\mathcal{O}\} .$$

On exprime tous les moments en B :

- Moment en B de $\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathrm{B}, \mathbf{F}_{\mathrm{m}}) &= (-F_{\mathrm{m}})\mathbf{v} \wedge \mathbf{MB}, \\ \mathbf{M}(\mathrm{B}, \mathbf{F}_{\mathrm{m}}) &= -F_{\mathrm{m}} L_2 \mathbf{z}. \end{aligned}$$

- Moment en B de $\mathbf{F}_{\mathrm{cp}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathrm{B}, \mathbf{F}_{\mathrm{cp}}) &= (-F_{\mathrm{c}} \cos\beta \mathbf{u} - F_{\mathrm{c}} \sin\beta \mathbf{v}) \wedge \mathbf{AB}, \\ \mathbf{M}(\mathrm{B}, \mathbf{F}_{\mathrm{cp}}) &= F_{\mathrm{c}} \cos\beta L_1 \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Le PFS appliqué aux moments en B en projection sur (O, $\mathbf{z}$) nous donne la relation suivante : $F_{\mathrm{m}} = \dfrac{L_1}{L_2} F_{\mathrm{c}} \cos\beta$.

5) À l'aide des questions 1, 2 et 3 :

$$\left\{ \begin{aligned} C_{\mathrm{f}} &= 2 f F_{\mathrm{n}} R, \\ F_{\mathrm{c}} &= 2 F_{\mathrm{f}} \cos\alpha, \\ F_{\mathrm{f}} &= \frac{F_{\mathrm{n}} H_1}{H_2 \sin\alpha + H_3 \cos\alpha}, \\ F_{\mathrm{m}} &= \frac{L_1}{L_2} F_{\mathrm{c}} \cos\beta, \end{aligned} \right.$$

d'où :

$$C_{\mathrm{f}} = \frac{f R L_2 F_{\mathrm{m}} (H_2 \sin\alpha + H_3 \cos\alpha)}{H_1 L_1 \cos\alpha \cos\beta}.$$

6) On suit toujours la même démarche : après avoir isolé la biellette B_1, on effectue le bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur la biellette B_1 :

- efforts transmis par la liaison pivot d'axe (G^*, $\mathbf{z}$) en G^*, torseur associé

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{Fourche} \to \mathrm{B}_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{\mathrm{G}}^* \mathbf{x} + Y_{\mathrm{G}}^* \mathbf{y} + Y_{\mathrm{G}}^* \mathbf{z} \\ L_{\mathrm{G}}^* \mathbf{x} + M_{\mathrm{G}}^* \mathbf{y} \end{array} \right\}_{\mathrm{G}^*};$$

- force exercée par le fil de liaison f_1 en F^*. Le système est également considéré comme symétrique $\left(\|\mathbf{F}_{\mathrm{f}1}^*\| = \|\mathbf{F}_{\mathrm{f}2}^*\| = F_{\mathrm{c}}^*\right)$, torseur associé :

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{Fil} \to \mathrm{B}_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{\mathrm{c}}^* \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\mathrm{F}^*};$$

- force exercée par la roue sur la biellette B_1 par l'intermédiaire du patin en P : $-\mathbf{F}_{\mathrm{p}_1}$, torseur associé :

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{Roue} \to \mathrm{B}_1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_{\mathrm{n}} \mathbf{x} + F_{\mathrm{t}} \mathbf{z} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\mathrm{P}}.$$

Principe fondamental de la statique appliqué en G* sur la composante des moments :

$$\sum \left\{ \mathcal{A}(\text{ext} \rightarrow \text{B}_1) \right\} = \{\mathcal{O}\}.$$

On exprime tous les moments en G* :

- Moment en G* de $\mathbf{F}_c^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathrm{G}^*, \mathbf{F}_\mathrm{c}^*) &= F_\mathrm{c}^* \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}^*\mathbf{G}^*, \\ \mathbf{M}(\mathrm{G}^*, \mathbf{F}_\mathrm{c}^*) &= -F_\mathrm{c}^* H_2^* \mathbf{z}. \end{aligned}$$

- Moment en G* de -$\mathbf{F}_\mathrm{p}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathrm{G}^*, -\mathbf{F}_\mathrm{p}) &= -\mathbf{F}_\mathrm{p} \wedge \mathbf{PG}^*, \\ \mathbf{M}(\mathrm{G}^*, -\mathbf{F}_\mathrm{p}) &= \bullet\mathbf{x} + \bullet\mathbf{y} + F_\mathrm{n} H_1^* \mathbf{z}. \end{aligned}$$

En projection sur l'axe (O, $\mathbf{z}$), on obtient : $F_\mathrm{c}^* = F_\mathrm{n} \dfrac{H_1^*}{H_2^*}$.

7) À partir des relations établies en 1, 3 et 5, on obtient :

$$\begin{cases} C_\mathrm{f}^* = 2 f F_\mathrm{n} R, \\ F_\mathrm{n} = \dfrac{H_2^*}{H_1^*} F_\mathrm{c}^*, \\ F_\mathrm{c}^* = \dfrac{L_2 F_\mathrm{m}}{L_1 \cos\beta}, \end{cases}$$

d'où :

$$C_\mathrm{f}^* = 2 f R \frac{H_2^* L_2}{H_1^* L_1 \cos\beta} F_\mathrm{m}.$$

8) On supposera que $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ et que $H_1^* = H_1$.

$$\begin{cases} C_\mathrm{f} = \dfrac{H_2 + H_3}{H_1} \dfrac{f R L_2 F_\mathrm{m}}{L_1 \cos\beta}, \\ C_\mathrm{f}^* = \dfrac{2H_2^*}{H_1^*} \dfrac{f R L_2 F_\mathrm{m}}{L_1 \cos\beta}, \end{cases}$$

d'où

$$C_\mathrm{f}^* = \frac{2H_2^*}{H_2 + H_3} C_\mathrm{f}.$$

Application numérique : $H_2 = 85$ mm, $H_3 = 20$ mm et que $H_2^* = 120$ mm et $C_\mathrm{f}^* > 2C_\mathrm{f}$.

9) **Conclusion**
Les résultats expérimentaux ne correspondent pas aux résultats issus de la modélisation : les dimensions sont approximatives et l'hypothèse par rapport au câble « Le deuxième système de freinage étudié est tel que l'extrémité supérieure de chaque biellette est soumise directement à l'effort F_c^* dans le câble de frein » est à revoir. Il est important de toujours conserver un esprit critique vis à vis des modèles étudiés en les confrontant à des données réelles (expérimentales).

5.6 Mouflage

1) Étudions l'équilibre statique de la première poulie B de rayon r. Les torseurs statiques s'écrivent :

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{Poids} \rightarrow \text{Poulie}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{B}} \quad \left\{ \mathcal{A}(\text{BC} \rightarrow \text{Poulie}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{\text{BC}} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{K}}.$$

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{AB} \rightarrow \text{Poulie}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{\text{AB}} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{L}}.$$

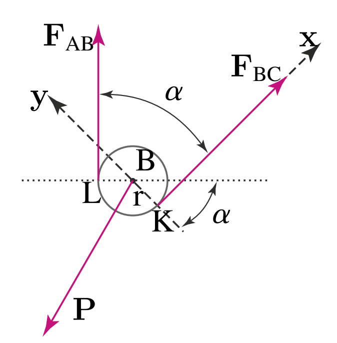


Figure 5.25 **Système considéré avec P quelconque.**

En utilisant la figure 5.25, l'équation des moments en B s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{BC}} \wedge \mathbf{KB} + \mathbf{F}_{\text{AB}} \wedge \mathbf{LB} = \mathbf{0}.$$

En projetant sur la droite (BC) appelée ici $\mathbf{x}$ ($\mathbf{y}$ lui est orthogonal) :

$$F_{\text{BC}}\mathbf{x} \wedge r\mathbf{y} + F_{\text{AB}}(\cos\alpha\mathbf{x} + \sin\alpha\mathbf{y}) \wedge r(\sin\alpha\mathbf{x} - \cos\alpha\mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

soit en projection sur $\mathbf{z}$:

$$F_{\text{BC}}r - F_{\text{AB}}r\cos^2\alpha - F_{\text{AB}}r\sin^2\alpha = \mathbf{0}.$$

De l'équation précédente, on peut conclure que $\mathbf{F}_{\text{BC}} = \mathbf{F}_{\text{AB}}$. La tension dans les deux brins [BC] et [AB] est donc identique. En procédant de même, il est possible de montrer que $\mathbf{F}_{\text{A'C}} = \mathbf{F}_{\text{CH}}$. La tension dans les deux brins [A'C] et [CH] est donc identique.

2) Le repère de projection peut être celui constitué de la direction de $\mathbf{P}$ et de sa perpendiculaire (figure 5.26).

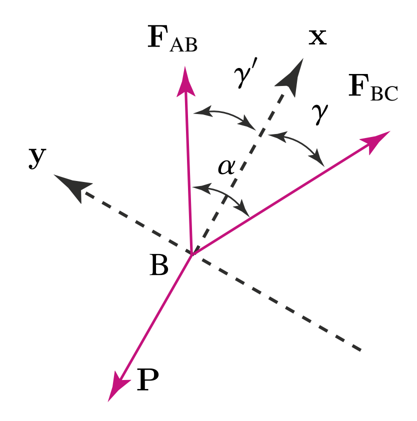


Figure 5.26 Système considéré.

En projetant la résultante du PFS sur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, et en posant $\gamma + \gamma' = \alpha$ il vient :

$$\begin{cases} -P + F_{BC} \cos \gamma + F_{AB} \cos \gamma' = 0. \\ -F_{BC} \sin \gamma + F_{AB} \sin \gamma' = 0. \end{cases}$$

soit, en sachant que $F_{AB} = F_{BC} = F_2$:

$$\begin{cases} P = 2F_2 \cos \dfrac{\alpha}{2}. \\ \gamma = \gamma' \Rightarrow \gamma = \dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

3) D'après la question 1, $F_{CH} = F_{CA'} = F$, où F est la force exercée par le sauveteur. D'après la question 2, il vient directement en identifiant P à F_2, F_2 à F et β à α :

$$F_2 = 2F \cos \frac{\beta}{2}.$$

4) En injectant le résultat de la question 2 dans celui de la question 1 :

$$P = 2\left(2F \cos \frac{\beta}{2}\right) \cos \frac{\alpha}{2} = 4F \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

5) D'après la question précédente :

$$F = \frac{P}{4 \cos \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\beta}{2}}.$$

Donc F est minimum si $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ est maximum soit si simultanément $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = 0$. Ce qui revient à dire que tous les brins sont alignés. Dans ce cas : $F = \frac{P}{4}$.

6) Utilisons la figure 5.27. PFS en G projeté sur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{z}$:

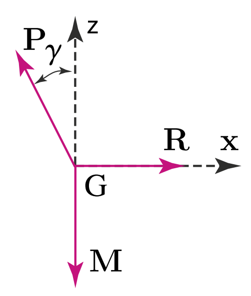


Figure 5.27 Système considéré.

$$\begin{cases} R - P\sin\gamma = 0. \\ -M + P\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Soit :

$$P = \frac{M}{\cos\gamma} = \frac{mg}{\cos\gamma},$$

d'où :

$$F = \frac{mg}{4\cos\gamma}.$$

Aide-t-il le premier de cordée ? $R = mg\tan\gamma$. Si R augmente, γ augmente, $\cos\gamma \to 0$ et donc F augmente. Il n'aide donc pas son sauveteur en s'écartant du mur.

5.7 Détendeur de plongée

1) La pression de l'eau vaut P_a et s'exerce sur toute la membrane de surface S_m. Le torseur résultant s'écrit donc en A :

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{Eau} \to \text{Membrane}) \right\} = \left\{ \begin{matrix} -P_a S_m \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}_A.$$

2) De même, le torseur résultant de la dépression sur la membrane s'écrit en A :

$$\left\{ \mathcal{A}(\text{Dépression} \to \text{Membrane}) \right\} = \left\{ \begin{matrix} (P_a - \Delta P) S_m \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}_A.$$

3) Effectuons l'inventaire des efforts qui s'appliquent sur le pointeau :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Eau} \rightarrow \text{Membrane})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -P_{\text{a}}S_{\text{m}}\mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{A}},$$

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Détendeur} \rightarrow \text{P})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_x\mathbf{x} + R_y\mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{O}},$$

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Dépression} \rightarrow \text{Membrane})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} (P_{\text{a}} - \Delta P)\mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{A}}.$$

Le clapet C exerce une force ponctuelle sur le pointeau en B. Appelons F_{c} cette force que nous devrons calculer. Le torseur résultant s'écrit alors :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{C} \rightarrow \text{P})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_{\text{c}}\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{B}}.$$

Le PFS appliqué au pointeau en O s'écrit :

- Pour la résultante projetée sur les axes de R :

$$\left\{ \begin{array}{l} /\mathbf{x} : R_x - F_{\text{c}} = 0. \\ /\mathbf{y} : -P_{\text{a}}S_{\text{m}} + (P_{\text{a}} - \Delta P)S_{\text{m}} + R_y = 0. \end{array} \right.$$

- Pour le moment :

$$-F_{\text{c}}\mathbf{x} \wedge \mathbf{BO} - (P_{\text{a}}S_{\text{m}})\mathbf{y} \wedge \mathbf{AO} + (P_{\text{a}} - \Delta P)S_{\text{m}}\mathbf{y} \wedge \mathbf{AO} = 0.$$

Or $\mathbf{AO} = -a\cos\alpha\mathbf{y} + a\sin\alpha\mathbf{x}$, donc en projection sur $\mathbf{z}$:

$$-F_{\text{c}}b + a\Delta P\, S_{\text{m}}\sin\alpha = 0.$$

Finalement, F_{c} est déterminée :

$$F_{\text{c}} = \frac{a}{b}\sin\alpha\Delta P\, S_{\text{m}}.$$

Donc le torseur exercé par le pointeau sur le clapet en B s'écrit :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{P} \rightarrow \text{C})\ \right\} = -\left\{\ \mathcal{A}(\text{C} \rightarrow \text{P})\ \right\}_{\text{B}} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{a}{b}\sin\alpha\Delta P\, S_{\text{m}}\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{B}}.$$

4) Il faut dans un premier temps recenser tous les torseurs qui s'appliquent sur le clapet.

- Torseur de la moyenne pression sur le clapet calculé en E :

$$\left\{\ \mathcal{A}(M_{\text{P}} \rightarrow \text{C})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} M_{\text{P}}S_{\text{c}}\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\text{E}}.$$

- Torseur du ressort agissant sur le clapet en E :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{R} \to \mathrm{C})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -P_\mathrm{a}\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_\mathrm{E}$$

- Torseur de la liaison pivot entre le clapet et le détendeur en D :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Détendeur} \to \mathrm{C})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_y\mathbf{y} \\ N\mathbf{z} \end{array} \right\}_\mathrm{D}.$$

- Torseur du pointeau sur le clapet en B :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{P} \to \mathrm{C})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{a}{b}\sin\alpha\Delta P S_\mathrm{m}\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_\mathrm{B}.$$

- Torseur de la dépression sur le clapet en B en négligeant la surface des bords du clapet devant S_c :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\text{Dépression} \to \mathrm{C})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -(P_\mathrm{a}\Delta P)S_\mathrm{c}\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_\mathrm{B}.$$

Le PFS appliqué au clapet peut être calculé au point B. Dans ce cas, en ne considérant que la projection selon $\mathbf{x}$:

$$\frac{a}{b}\sin\alpha\Delta P S_\mathrm{m} - P_\mathrm{a} + M_\mathrm{P}S_\mathrm{c} - (P_\mathrm{a} - \Delta P)S_\mathrm{c} = 0.$$

Finalement, en négligeant S_c devant S_m, à :

$$\Delta P = \frac{P_\mathrm{a} - S_\mathrm{c}(M_\mathrm{P} - P_\mathrm{a})}{\frac{a}{b}\sin\alpha S_\mathrm{m}}.$$

5) Lorsque P_a augmente, ΔP diminue. Le plongeur fera donc moins d'effort inspiratoire au fond car la dépression nécessaire pour ouvrir le clapet sera moindre.

Partie III

Conservation de l'énergie : premier principe

INTRODUCTION 6

Dans cette partie nous allons rappeler rapidement les principales grandeurs employées en énergétique (puissance, travail, énergie potentielle et énergie cinétique) et les exprimer dans le cadre de la mécanique des systèmes de solides indéformables. Dans un second temps nous écrirons le principe de conservation de l'énergie dans ce même cadre.

6.1 ÉNERGÉTIQUE

6.1.1 Puissance des actions mécaniques exercées sur un solide

Supposons un solide S. Les actions mécaniques extérieures à S sur S sont représentées par un champ vectoriel ΨdP où dP est une mesure volumique, surfacique ou linéique. S'il s'agit d'actions à distance (attraction gravitationnelle, par exemple), l'intégrale est une intégrale volumique. S'il s'agit d'actions de contact, l'intégrale est alors une intégrale de surface. Avec ces notations, on construit le torseur des actions de $\overline{S}$ sur S au point A :

$$\left\{ \mathcal{A}(\overline{S} \rightarrow S) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_S \Psi(\overline{S} \rightarrow S)dP \\ \displaystyle\int_S \mathbf{AP} \wedge \Psi(\overline{S} \rightarrow S)dP \end{array} \right\}_A .$$

a) Puissance associée à des actions extérieures

S_e étant un système matériel extérieur à S_i. Les actions mécaniques de S_e sur S_i sont représentées par un champ vectoriel $\Psi(S_e \rightarrow S_i)(P_i)dP$ avec dP une mesure volumique, surfacique ou linéique et P_i le point d'application de l'effort. La puissance développée par les actions mécaniques de S_e sur S_i pour la loi k (contact, attraction gravitationnelle ...), dans le mouvement de S_i par rapport au repère R, à la date t, est par définition :

$$P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R) = \int_{S_i} \Psi(S_e \rightarrow S_i)(P_i) \cdot \mathbf{V}(P_i/R)dP.$$

Ceci s'écrit aussi :

$$P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R) = \left\{ \mathcal{A}(S_e \rightarrow S_i) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(R_i/R) \right\}.$$

Alors :

$$P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R_1) = \int_{S_i} \Psi(S_e \rightarrow S_i)(P_i) \cdot \mathbf{V}(P_i/R_1)dP,$$

$$P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R_2) = \int_{S_i} \Psi(S_e \rightarrow S_i)(P_i) \cdot \mathbf{V}(P_i/R_2)dP.$$

Par conséquent :

$$P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R_1) - P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R_2) = \int_{S_i} \Psi(S_e \to S_i)(P_i) \cdot \left[\mathbf{V}(P_i/R_1) - \mathbf{V}(P_i/R_2)\right] dP.$$

Or :

$$\mathbf{V}(P_i/R_1) = \mathbf{V}(P_i/R_2) + \mathbf{V}(P_i \in R_2/R_1),$$

soit :

$$P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R_1) - P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R_2) = \int_{S_i} \Psi(S_e \to S_i)(P_i) \cdot \left[\mathbf{V}(P_i \in R_2/R_1)\right] dP,$$

soit encore :

$$P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R_1) - P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R_2) = \left\{ \mathcal{A}(S_e \to S_i) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(R_2/R_1) \right\}.$$

Le système Σ est un système de solides S_j, S_e étant un système matériel appartenant à $\overline{\Sigma}$. La puissance développée par les actions mécaniques de S_e sur Σ, pour la loi k (contact, attraction gravitationnelle ...), dans le mouvement de Σ par rapport au repère galiléen R_g, à la date t, est par définition :

$$P(S_e \xrightarrow{k} \Sigma/R) = \sum_{j=1}^{n} \int_{S_j} \Psi(S_e \to S_j)(P_j) \cdot \mathbf{V}(P_j/R_g) dP,$$

ce qui s'écrit aussi :

$$P(S_e \xrightarrow{k} \Sigma/R) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \mathcal{A}(S_e \to S_j) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(R_j/R_g) \right\}.$$

b) Puissance associée à des actions réciproques

Soit deux systèmes disjoints S_1 et S_2 en mouvement par rapport à R. La puissance des actions réciproques entre S_1 et S_2, pour la loi d'interaction k, s'écrit :

$$P(S_1 \overset{k}{\leftrightarrow} S_2/R) = P(S_1 \xrightarrow{k} S_2/R) + P(S_2 \xrightarrow{k} S_1/R).$$

Par conséquent :

$$P(S_1 \overset{k}{\leftrightarrow} S_2/R_1) = P(S_1 \xrightarrow{k} S_2/R_1) + P(S_2 \xrightarrow{k} S_1/R_1).$$

De même :

$$P(S_1 \overset{k}{\leftrightarrow} S_2/R_2) = P(S_1 \xrightarrow{k} S_2/R_2) + P(S_2 \xrightarrow{k} S_1/R_2).$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(S_1 \overset{k}{\leftrightarrow} S_2/R_1) - P(S_1 \overset{k}{\leftrightarrow} S_2/R_2) &= \left\{ \mathcal{A}(S_1 \xrightarrow{k} S_2) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(R_2/R_1) \right\} \\ &\quad + \left\{ \mathcal{A}(S_2 \xrightarrow{k} S_1) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(R_2/R_1) \right\}. \end{aligned}$$

Or :

$$\left\{ \mathcal{A}(S_1 \xrightarrow{k} S_2) \right\} = -\left\{ \mathcal{A}(S_2 \xrightarrow{k} S_1) \right\},$$

Donc

$$P(S_1 \overset{k}{\leftrightarrow} S_2/R_1) - P(S_1 \overset{k}{\leftrightarrow} S_2/R_2) = 0.$$

La puissance des actions réciproques entre deux solides pour toute loi d'interaction k est indépendante du référentiel du mouvement choisi. On la note donc :

$$P(S_1 \overset{k}{\leftrightarrow} S_2).$$

6.1.2 Travail

S_e étant un système matériel appartenant à $\overline{S_i}$, le travail entre les dates t_1 et t_2 des actions mécaniques de S_e sur S_i pour la loi k (contact, attraction gravitationnelle ...), dans le mouvement de S_i par rapport au repère R, est par définition :

$$W(S_e \xrightarrow{k} S_i/R)_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(S_e \xrightarrow{k} S_i/R)\mathrm{d}t.$$

6.1.3 Énergie potentielle

On suppose deux solides S_1 et S_2 en mouvement par rapport à un référentiel R.

a) Énergie potentielle associée à des efforts extérieurs

Dans le cas général, la puissance développée par les efforts exercés par un point P_2 de S_2 sur un point P_1 de S_1, en accord avec la loi d'interaction k, s'écrit :

$$P(S_2 \xrightarrow{k} S_1/R) = \int_{S_1 S_2} \Psi(S_2 \xrightarrow{k} S_1)(P_2, P_1) \cdot \mathbf{V}(P_1/R)\mathrm{d}P_1 \cdot \mathrm{d}P_2.$$

On procède à une double intégration. On intègre d'abord l'effet de chacun des points P_2 de S_2 sur un même point P_1 de S_1 pour calculer l'action du solide S_2 sur ce point P_1. Puis on intègre sur l'ensemble des points P_1 de S_1 pour calculer l'action du solide S_2 sur le solide S_1.

Si, quels que soient les mouvements de S_1 et de S_2 par rapport à R, on peut écrire :

$$P(S_2 \xrightarrow{k} S_1/R) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S_1, S_2} \Theta(P_1, P_2)\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2$$

alors la puissance développée par l'action mécanique de S_2 et S_1, dérive d'une énergie potentielle définie comme suit :

$$E_p(S_2 \xrightarrow{k} S_1/R) = \int_{S_1 S_2} \Theta(P_1, P_2)\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2,$$

et dans ce cas :

$$P(S_2 \xrightarrow{k} S_1/R) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} E_p(S_2 \xrightarrow{k} S_1/R).$$

b) Énergie potentielle associée à des actions mutuelles

De même, si quels que soient les mouvements de S_1 et S_2 par rapport à R quelconque, la puissance des actions mutuelles entre S_1 et S_2 peut s'écrire explicitement :

$$\mathrm{P}(S_2 \overset{k}{\leftrightarrow} S_1) = -\frac{d}{dt}\int_{S_1\times S_2} \Theta(P_1, P_2)\,dP_1 dP_2.$$

On pourra alors associer une énergie potentielle aux actions mutuelles entre S_1 et S_2 :

$$E_p(S_2 \overset{k}{\leftrightarrow} S_1) = \int_{S_1\times S_2} \Theta(P_1, P_2)\,dP_1 dP_2,$$

et comme précédemment la puissance dérive de cette énergie potentielle :

$$\mathrm{P}(S_2 \overset{k}{\leftrightarrow} S_1) = -\frac{dE_p(S_2 \overset{k}{\leftrightarrow} S_1)}{dt}.$$

Dans tous les cas l'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante additive près qu'on omet d'écrire en général.

- *Exemple : énergie potentielle associée aux inter-efforts gravitationnels*

La force gravitationnelle (ou loi de Newton) exercée par le point matériel P_1 de masse dm_1 sur le point matériel P_2 de masse dm_2 s'écrit :

$$\Psi_{\mathbf{g}}(P_1 \to P_2) = -\mathcal{G}_0 dm_1 dm_2 \frac{\mathbf{P_1P_2}}{\|\mathbf{P_1P_2}\|^3}$$

où $\mathcal{G}_0$ est la constante de gravitation universelle. Alors l'action du solide S_1 sur un point P_2 du solide S_2 s'écrit :

$$\Psi_{\mathbf{g}}(S_1 \to P_2) = -\mathcal{G}_0 \int_{S_1} dm_1 dm_2 \frac{\mathbf{P_1P_2}}{\|\mathbf{P_1P_2}\|^3},$$

La puissance développée par l'attraction gravitationnelle de S_1 sur S_2, où S_2 est en mouvement par rapport au repère R_g s'écrit :

$$\mathrm{P}(S_1 \overset{\mathbf{g}}{\rightarrow} S_2/R_g) = \int_{S_2} \Psi_{\mathbf{g}}(S_1 \to P_2)\cdot \mathbf{V}(P_2/R_g).$$

Par ailleurs, la puissance développée par l'attraction gravitationnelle de S_2 sur S_1, où S_1 est en mouvement par rapport au repère R_g, s'écrit :

$$\mathrm{P}(S_2 \overset{\mathbf{g}}{\rightarrow} S_1/R_g) = \int_{S_1} \Psi_{\mathbf{g}}(S_2 \to P_1)\cdot \mathbf{V}(P_1/R_g).$$

Par conséquent la puissance développée par les actions mutuelles entre S_1 et S_2 est :

$$\mathrm{P}(S_2 \overset{\mathbf{g}}{\leftrightarrow} S_1) = \mathrm{P}(S_1 \overset{\mathbf{g}}{\rightarrow} S_2/R_g) + \mathrm{P}(S_2 \overset{\mathbf{g}}{\rightarrow} S_1/R_g).$$

En développant :

$$P(S_2 \overset{g}{\leftrightarrow} S_1) = -\mathcal{G}_0 \int_{S_1 \times S_2} \frac{\mathbf{P_1P_2}}{\|\mathbf{P_1P_2}\|^3}(\mathbf{V}(P_2/R_g) - \mathbf{V}(P_1/R_g))dm_1dm_2.$$

$$P(S_2 \overset{g}{\leftrightarrow} S_1) = -\mathcal{G}_0 \int_{S_1 \times S_2} \frac{\mathbf{P_1P_2}}{\|\mathbf{P_1P_2}\|^3} \cdot \left[\frac{d\mathbf{P_1P_2}}{dt}\right]_{R_g} dm_1dm_2.$$

Soit finalement :

$$P(S_2 \overset{g}{\leftrightarrow} S_1) = \mathcal{G}_0 \int_{S_1 \times S_2} \left[\frac{d}{dt}\frac{1}{\|\mathbf{P_1P_2}\|}\right]_{R_g} dm_1dm_2$$

Et, comme il s'agit de systèmes à masse conservative :

$$P(S_2 \overset{g}{\leftrightarrow} S_1) = \frac{d}{dt}\left[\mathcal{G}_0 \int_{S_1 \times S_2} \frac{dm_1dm_2}{\|\mathbf{P_1P_2}\|}\right]$$

Donc il existe une énergie potentielle associée aux actions mutuelles de l'attraction gravitationnelle entre deux solides S_1 et S_2 qui s'écrit :

$$E_p(S_2 \overset{g}{\leftrightarrow} S_1) = -\mathcal{G}_0 \int_{S_1 \times S_2} \frac{dm_1dm_2}{\|\mathbf{P_1P_2}\|}$$

c) Quelques actions mutuelles et leur énergie potentielle associée

Attraction gravitationnelle entre deux solides S_1 et S_2 L'énergie potentielle est :

$$E_p(S_2 \overset{g}{\leftrightarrow} S_1) = -\mathcal{G}_0 \int_{S_1 \times S_2} \frac{dm_1dm_2}{\|\mathbf{P_1P_2}\|}.$$

Attraction gravitationnelle à la surface de la Terre entre la Terre et un solide S On a dans ce cas :

$$E_p(\text{Terre} \overset{g}{\leftrightarrow} S) = E_p(\text{Pes} \overset{g}{\rightarrow} S/\text{Terre}) = -m(S)\,\mathbf{g} \cdot \mathbf{OG},$$

O étant un point fixe dans le référentiel du mouvement attaché à la surface de la terre, **g** le vecteur accélération de la pesanteur en O et G le centre d'inertie du solide S.

Ressort de traction-compression Dans le cas d'un ressort linéaire de traction compression on a :

$$E_p(S_2 \overset{r}{\leftrightarrow} S_1) = \frac{k}{2}(l - l_0)^2,$$

où r est un ressort de traction compression, de raideur k et de longueur libre l_0 et où l paramètre la distance entre les points d'attache du ressort sur les deux solides S_1 et S_2.

Ressort de torsion Pour un ressort de torsion :

$$E_p(S_2 \overset{r}{\leftrightarrow} S_1) = \frac{C}{2}(\theta - \theta_0)^2,$$

où r est un ressort de torsion, de raideur C, et de rotation libre θ_0 et où θ paramètre la torsion du ressort.

6.1.4 Énergie cinétique

L'énergie cinétique, dans son mouvement par rapport à un repère R, du système matériel Σ, de masse $m(\Sigma)$ de centre d'inertie G et de tenseur d'inertie $\underline{\underline{J}}(G, \Sigma)$ est le scalaire suivant :

$$T(\Sigma/R) = \frac{1}{2}\int_{P\in\Sigma} \left[\mathbf{V}(P/R)\right]^2 dm(P)$$

Ceci s'écrit aussi :

$$T(\Sigma/R) = \frac{1}{2}m(\Sigma)\left[\mathbf{V}(G/R)\right]^2 + \frac{1}{2}\Omega(\Sigma/R)\cdot\left(\underline{\underline{J}}(G,\Sigma)\cdot\Omega(\Sigma/R)\right).$$

6.2 Conservation de l'énergie

6.2.1 Théorème de l'énergie cinétique

a) Théorème de l'énergie cinétique pour un solide S

Le principe de conservation de l'énergie conduit à écrire, pour un solide indéformable S, que la puissance développée par les actions mécaniques extérieures au solide S, est égale à la variation d'énergie cinétique du solide soit :

$$P(\overline{S} \to S/R_g) = \frac{dT(S/R_g)}{dt}.$$

b) Théorème de l'énergie cinétique pour deux solides S_1 et S_2

Si l'on considère maintenant un système Σ constitué de deux solides S_1 et S_2, on peut appliquer le principe de conservation de l'énergie à chacun des deux solides :

$$P(\overline{S}_1 \to S_1/R_g) = \frac{dT(S_1/R_g)}{dt} \quad \text{et} \quad P(\overline{S}_2 \to S_2/R_g) = \frac{dT(S_2/R_g)}{dt}.$$

Donc :

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = \frac{dT(S_1/R_g)}{dt} + \frac{dT(S_2/R_g)}{dt} = P(\overline{S}_1 \to S_1/R_g) + P(\overline{S}_2 \to S_2/R_g).$$

Soit :

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = \{\ \mathcal{A}(\overline{S}_1 \to S_1)\ \}\cdot\{\ \mathcal{V}(S_1/R_g)\ \} + \{\ \mathcal{A}(\overline{S}_2 \to S_2)\ \}\cdot\{\ \mathcal{V}(S_2/R_g)\ \}.$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{dT}(\Sigma/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t} = \left[\left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \mathrm{S_1})\ \right\} + \left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{S_2} \to \mathrm{S_1})\ \right\}\right] \cdot \left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g})\ \right\} + \left[\left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \mathrm{S_2})\ \right\} + \left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{S_1} \to \mathrm{S_2})\ \right\}\right] \cdot \left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{S_2}/\mathrm{R_g})\ \right\}.$$

Comme :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{S_2} \to \mathrm{S_1})\ \right\} = -\left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{S_1} \to \mathrm{S_2})\ \right\}.$$

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{dT}(\Sigma/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1,2} \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \mathrm{S_i})\ \right\} \cdot \left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{S_i} \to \mathrm{R_g})\ \right\} + \left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{S_1} \to \mathrm{S_2})\ \right\} \cdot \left[\left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{S_2}/\mathrm{R_g})\ \right\} - \left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g})\ \right\}\right],$$

ou encore :

$$\frac{\mathrm{dT}(\Sigma/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t} = \mathrm{P}(\overline{\Sigma} \to \Sigma/\mathrm{R_g}) + \mathrm{P}(\mathrm{S_1} \leftrightarrow \mathrm{S_2}).$$

La puissance développée par les efforts extérieurs et intérieurs au système Σ est égale à la variation de l'énergie cinétique du système. Ceci se généralise naturellement à un système de n solides.

c) Théorème de l'énergie cinétique pour un système Σ de n solides

La généralisation à un système Σ de n solides donne :

$$\frac{\mathrm{dT}(\Sigma/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \mathrm{S_i})\ \right\} \cdot \left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{S_i}/\mathrm{R_g})\ \right\} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{S_j} \to \mathrm{S_i})\ \right\} \cdot \left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{S_i}/\mathrm{S_j})\ \right\}.$$

Le théorème de l'énergie cinétique pour un système Σ de n solides s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{dT}(\Sigma/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\mathrm{P}(\overline{\Sigma} \to \Sigma/\mathrm{R_g})}_{\text{Puissance des efforts extérieurs}} + \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S_i} \leftrightarrow \mathrm{S_j})}_{\text{Puissance des efforts intérieurs}}$$

6.2.2 Intégrale première de l'énergie cinétique : système conservatif

Si les puissances des efforts intérieurs et extérieurs sont nulles ou bien dérivent d'une énergie potentielle, dont on notera la somme $\mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})$, alors le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{\mathrm{dT}(\Sigma/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{dE_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t}.$$

Dans ce cas, l'intégrale du théorème de l'énergie, appelée intégrale première de l'énergie cinétique, est une constante :

$$\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g}) + \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g}) = \text{Constante}$$

Cette intégrale première traduit directement la conservation de l'énergie du système. Il y a transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique et réciproquement. Le système est alors dit « conservatif ».



Énergie potentielle pour quelques lois d'interaction

Attraction gravitationnelle entre deux solides $\mathrm{S_1}$ et $\mathrm{S_2}$

$$\mathrm{E_p}(\mathrm{S_2} \overset{\mathbf{g}}{\leftrightarrow} \mathrm{S_1}) = -\mathcal{G}_0 \int_{\mathrm{S_1}\times\mathrm{S_2}} \frac{\mathrm{d}m_1\mathrm{d}m_2}{\|\mathbf{P_1P_2}\|}.$$

Attraction gravitationnelle à la surface de la Terre, entre la Terre et un solide S en mouvement par rapport à la Terre

$$\mathrm{E_p}(\text{Terre} \overset{\mathbf{g}}{\leftrightarrow} \mathrm{S}) = \mathrm{E_p}(\text{Pes} \overset{\mathbf{g}}{\rightarrow} \mathrm{S}/\text{Terre}) = -m(\mathrm{S})\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{OG}.$$

Ressort de traction-torsion

$$\mathrm{E_p}(\mathrm{S_1} \overset{r}{\leftrightarrow} \mathrm{S_2}) = \frac{1}{2}K(L-L_0)^2 + \frac{1}{2}C(\theta-\theta_0)^2,$$

où r est un ressort de traction torsion, de raideur K en traction-compression, de raideur C en torsion, et de longueur libre l_0, et où l paramètre la distance entre les points d'attache du ressort sur les deux solides $\mathrm{S_1}$ et $\mathrm{S_2}$ et de torsion libre θ_0 où θ paramètre la torsion du ressort.

Théorème de l'énergie cinétique pour un système Σ de n solides

$$\frac{\mathrm{dT}(\Sigma/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\mathrm{P}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma/\mathrm{R_g})}_{\text{Puissance des efforts extérieurs}} + \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{S_i} \leftrightarrow \mathrm{S_j})}_{\text{Puissance des efforts intérieurs}}$$

Intégrale première de l'énergie cinétique : conservation de l'énergie

Si

$$P(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g) = 0,$$

et

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = 0,$$

alors

$$T(\Sigma/R_g) = \text{Constante}.$$

Si

$$P(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g) = -\frac{d}{dt}E_p(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g),$$

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = -\frac{d}{dt}E_p(S_i \leftrightarrow S_j),$$

alors :

$$T(\Sigma/R_g) + E_p(\Sigma/R_g) = \text{Constante}.$$



Le théorème de l'énergie cinétique, permet d'écrire une équation scalaire pour un système de solides conservatif. Si le système ne comporte qu'un seul degré de liberté, cette équation suffit pour résoudre le problème. Prenons l'exemple d'un disque mal équilibré, modélisé comme l'union d'un disque équilibré D et d'un balourd. Le disque D, de rayon R, de centre O et de masse m_D, est attaché à un repère R_D $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z})$ en rotation à la vitesse $\mathbf{\Omega}(R_D/R_g)$ autour de l'axe $\mathbf{z}$ par rapport au référentiel du mouvement R_g $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. On note $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = \cos(\alpha)$. Le balourd est représenté par un point matériel B, de masse m_B, fixe dans R_D avec $\mathbf{OB} = b\mathbf{u}$. Une vitesse de rotation initiale $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\alpha}_0\mathbf{z}$ est imprimée au disque en position initiale $\alpha_0 = 0$, puis on le laisse libre. Le tenseur d'inertie du disque D vaut :

$$[J(O, D)] = m_D\frac{R^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z})}.$$

Le tenseur d'inertie du balourd B vaut :

$$J(O, B) = m_B b^2\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z})}.$$

L'énergie cinétique du système $\Sigma = D \cup B$ se calcule comme suit :

$$2T(\Sigma/R_g) = \mathbf{\Omega}(D/R_g) \cdot (\underline{\underline{J}}(O,\ D) + \underline{\underline{J}}(O,\ B)) \cdot \mathbf{\Omega}(D/R_g),$$

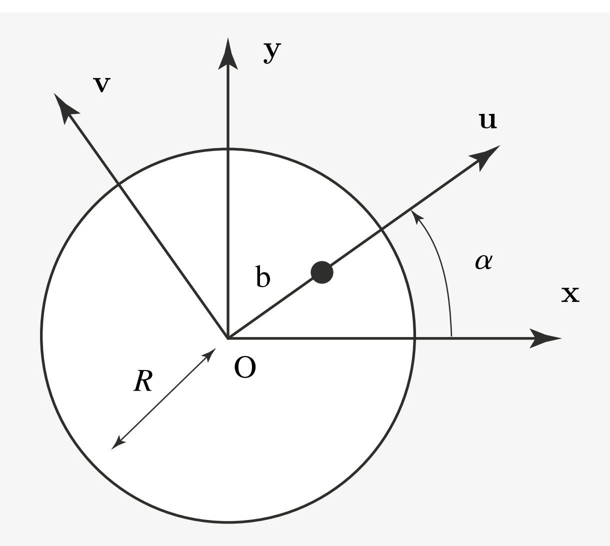


Figure 6.1 Notations.

et vaut :

$$2\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g}) = (m_{\mathrm{D}}\frac{R^2}{2} + \mathrm{m_B}b^2)\dot{\alpha}^2$$

L'énergie potentielle de la pesanteur du disque est nulle, par conséquent l'énergie potentielle du système Σ s'écrit :

$$\mathrm{E_p}(\mathrm{Terre} \overset{\mathbf{g}}{\leftrightarrow} \Sigma) = -m_{\mathrm{B}}\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{OB} = m_{\mathrm{B}}\,g\,b\sin\alpha$$

Comme :

$$\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g}) + E_{\mathrm{p}}(\Sigma/\mathrm{R_g}) = \text{Constante},$$

on en déduit :

$$(m_{\mathrm{D}}\frac{R^2}{2} + m_{\mathrm{B}}b^2)\dot{\alpha}^2 + m_{\mathrm{B}}\,g\,b\sin\alpha = (m_{\mathrm{D}}\frac{R^2}{2} + m_{\mathrm{B}}b^2)\dot{\alpha}_0^2.$$

La vitesse de rotation du disque n'est pas constante et dépend de la position du balourd :

$$\left(\dot{\alpha}^2 - \dot{\alpha}_0^2\right) = -\frac{2\,m_{\mathrm{B}}\,g\,b}{(m_{\mathrm{D}}\,R^2 + 2\,m_{\mathrm{B}}\,b^2)}\sin\alpha.$$

Le disque ralentit lorsque le balourd s'élève au dessus de l'axe de rotation et accélère lorsque le balourd descend.

Partie IV

Principe fondamental de la dynamique, principe des puissances virtuelles

Principe fondamental de la dynamique

7

7.1 Introduction : un peu d'histoire

Au début du XVIe siècle, la notion de force restait obscure. Une force, à la différence d'un mouvement, est difficile à mettre en évidence : c'est même impossible car la force n'est définie que par dualité à partir du déplacement ou de la vitesse. Ce n'est que la quantité qui, par produit scalaire avec l'une des deux quantités (déplacement ou vitesse), donne une énergie ou une puissance. Dans le système de Ptolémée, par exemple, les trajectoires et les mouvements relatifs des planètes étaient relativement bien décrits, quoique de façon complexe, par les systèmes d'épicycles, mais les lois régissant ces mouvements restaient encore inconnues. Le principe d'inertie, énoncé par Galilée, puis le principe fondamental de la dynamique, énoncé par Newton, sont à la base de la mécanique classique. La dynamique étant le régime où dominent les effets d'inertie, par opposition à la statique. Le principe d'inertie : ce principe est peut-être le plus grand apport de Galilée (1564-1642) à la physique. En faisant des expériences avec des billes qui roulent sur des plans de différentes natures, il observe que si le plan est très rugueux, la bille s'arrête rapidement, par contre, si le plan est très lisse ou recouvert d'huile, la bille parcourt une distance beaucoup plus grande avant de s'arrêter. Galilée eut alors l'idée de *forces* de frottement : le plan rugueux frotte très fortement sur la bille et l'oblige à s'arrêter rapidement. Au contraire, sur un plan lisse les forces de frottement sont très faibles et n'empêchent pas la bille de rouler. Dans la vie de tous les jours, les forces de frottement sont partout présentes et obligent les corps à stopper leur mouvement ; pour entretenir ce mouvement on doit alors constamment appliquer une force extérieure qui contrebalance ces forces de frottement. Mais si on pouvait réduire ces forces de frottement à zéro, alors le corps conserverait indéfiniment son mouvement.

C'est en faisant une telle extrapolation que Galilée donne une première formulation du principe d'inertie : *Tout corps possède une certaine inertie qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure, une force de frottement par exemple, ne l'oblige à arrêter ce mouvement,* i.e. *à modifier cette vitesse*. C'est finalement à partir de ce principe que Newton (1642-1727) introduit en 1687 la description des causes du mouvement et introduira la notion fondamentale de force : le mouvement d'un système isolé étant rectiligne et uniforme, toute déviation par rapport à cette loi du mouvement est caractérisée par une force. En l'absence de force, le corps poursuit sa trajectoire et conserve sa vitesse. Il en découle d'ailleurs que l'étude de petites déviations à une loi du mouvement d'un corps permet l'étude des forces auxquelles

ce corps est soumis, ce qui sera à la base des principes variationnels. La formalisation des principes de la mécanique est publiée dans l'ouvrage principal de I. Newton : les *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), où sont définies les notions de masse, de quantité de mouvement, de forces (motrice, centripète). Newton introduit un espace et un temps absolus, et énonce les principes fondamentaux de l'inertie, de l'égalité des actions réciproques ainsi que la « relation fondamentale de la dynamique » exprimant chez lui l'égalité entre force et dérivée de la quantité de mouvement.

7.2 Énoncé du principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un repère R_g appelé repère galiléen, tel que pour tout système matériel Σ en mouvement par rapport à R_g, le torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport à R_g est égal au torseur des actions mécaniques extérieures à Σ (ces torseurs étant évidemment écrits au même point). Si l'on note $\overline{\Sigma}$ l'extérieur de Σ le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma/R_g) \right\}_A = \left\{ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma) \right\}_A \quad \forall A.$$

7.2.1 Conséquences

En écrivant qu'en tout point de l'espace, les deux torseurs intervenant dans le principe fondamental de la dynamique sont égaux, on obtient deux équations vectorielles appelées théorèmes généraux de la dynamique. Soit m la masse et G le centre de gravité (supposé confondu avec le centre de masse pour la suite de l'ouvrage) du système matériel Σ en mouvement par rapport au référentiel galiléen R_g. On pose en un point A quelconque :

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma/R_g) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m\mathbf{\Gamma}(G/R_g) \\ \boldsymbol{\delta}(A, \Sigma/R_g) \end{array} \right\}_A \text{ et } \left\{ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}(\overline{\Sigma} \to \Sigma) \\ \mathbf{M}(A, \overline{\Sigma} \to \Sigma) \end{array} \right\}_A .$$

7.2.2 Théorème de la résultante dynamique

Alors, la résultante du torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport à R_g est égale à la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à Σ.

$$m\mathbf{\Gamma}(G/R_g) = \mathbf{R}(\overline{\Sigma} \to \Sigma).$$

7.2.3 Théorème du moment dynamique

Par ailleurs, le moment en tout point A du torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport à R_g est égal au moment du torseur des actions mécaniques extérieures à Σ pris au même point.

$$\boldsymbol{\delta}(A, \Sigma/R_g) = \mathbf{M}(A, \overline{\Sigma} \to \Sigma) \quad \forall A.$$

7.2.4 Théorème des actions mutuelles

Soit un système matériel Σ constitué de deux sous parties Σ_1 et Σ_2. On peut appliquer successivement le principe fondamental de la dynamique aux deux sous parties Σ_1 et Σ_2 de Σ. Alors :

$$\left\{\ \mathcal{D}(\Sigma_1/R_g)\ \right\} + \left\{\ \mathcal{D}(\Sigma_2/R_g)\ \right\} = \left\{\ \mathcal{D}(\Sigma/R_g)\ \right\}.$$

Par ailleurs, on applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) à chaque sous système

$$\left\{\ \mathcal{D}(\Sigma_1/R_g)\ \right\} = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma}_1 \to \Sigma_1)\ \right\} = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma_1)\ \right\} + \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma}_2 \to \Sigma_1)\ \right\},$$

$$\left\{\ \mathcal{D}(\Sigma_2/R_g)\ \right\} = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma}_2 \to \Sigma_2)\ \right\} = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma_2)\ \right\} + \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma}_1 \to \Sigma_2)\ \right\}.$$

En ajoutant ces deux équations et en utilisant le PFD appliqué à l'ensemble Σ on trouve :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\Sigma_1 \to \Sigma_2)\ \right\} = -\left\{\ \mathcal{A}(\Sigma_2 \to \Sigma_1)\ \right\}.$$

7.2.5 Cas particulier de la statique

Le principe fondamental de la dynamique se ramène à celui de la statique lorsque le torseur dynamique du système matériel Σ par rapport à R_g est nul. Il est nul en particulier dans les trois cas suivants :

1. Les effets d'inertie sur le système matériel Σ sont négligés.
2. La masse du système matériel Σ est supposée nulle (un ressort dit parfait par exemple).
3. Le système matériel Σ est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère galiléen R_g.

7.2.6 Équations du mouvement

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à écrire deux équations vectorielles, dont les projections sur une base orthonormée donnent, au maximum, six équations scalaires indépendantes. Ces équations scalaires sont des équations différentielles du second ordre, en général non linéaires, de la forme :

$$f(q_i(t),\ \dot{q}_i(t),\ \ddot{q}_i(t)) = 0,$$

où les paramètres q_i sont les i paramètres (indépendants) du mouvements (appelées aussi coordonnées généralisées). Outre les q_i, ces équations peuvent également contenir des composantes inconnues d'actions mécaniques. Par définition, une équation du mouvement est une équation différentielle du second ordre des paramètres du mouvement ne contenant aucune composante inconnue d'action mécanique. Par définition une intégrale première du mouvement est une équation différentielle du premier ordre de la forme $f(q_i(t),\ \dot{q}_i(t)) = 0$, obtenue par intégration d'une équation du mouvement.

a) Référentiels galiléens/non galiléens

En mécanique classique le temps est le même pour tous les observateurs, il est donné par des mouvements particuliers ou des processus naturels appelés horloges (oscillation d'un quartz, mouvement de certains astres, désintégration de la matière). On parle alors de chronologie galiléenne.

• *Référentiels galiléens*

On montre que tout repère R en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen R_g est également un repère galiléen. Le choix d'un repère galiléen est fonction du problème posé. Un repère galiléen est un repère dans lequel le principe fondamental de la dynamique est vérifié avec une bonne approximation, pour une étude donnée.

Repère de Copernic. Ce repère est défini par le centre de masse du système solaire (sensiblement le centre du Soleil) et par les directions stellaires. Il constitue une excellente approximation d'un repère galiléen pour l'étude des fusées interplanétaires par exemple.

Repère défini par le centre de la Terre et les directions stellaires. Ce repère constitue une excellente approximation d'un repère galiléen pour l'étude du mouvement de systèmes matériels restant dans le domaine terrestre, à l'intérieur d'une sphère centrée sur le centre de la Terre et de rayon maximal égal à quatre ou cinq fois celui de la Terre.

Repère terrestre. Pour la plupart des problèmes terrestres, un repère lié à la Terre constitue une très bonne approximation d'un repère galiléen.

• *Référentiel non galiléen*

Supposons un repère R ayant un mouvement quelconque mais connu par rapport à un repère galiléen R_g. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué au système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_g s'écrit pour un point A quelconque :

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma/R_g) \right\}_A = \left\{ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma) \right\}_A .$$

Le torseur dynamique a pour éléments de réduction en un point A quelconque :

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma/R_g) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{\forall M \in S} \mathbf{\Gamma}(M/R)\, dm \\ \displaystyle\int_{\forall M \in S} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{\Gamma}(M/R)\, dm \end{array} \right\}_A .$$

On utilise alors la relation de composition des vecteurs accélération :

$$\mathbf{\Gamma}(P/R_g) = \mathbf{\Gamma}(P/R) + \mathbf{\Gamma}(P \in R/R_g) + 2\,\mathbf{\Omega}(R/R_g) \wedge \mathbf{V}(P/R).$$

Ceci permet de construire le torseur « des forces d'inertie d'entraînement » de Σ dans son mouvement par rapport à S et R_g.

$$\{\mathcal{A}_e(\Sigma \in R/R_g)\} = -\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{\forall M \in \Sigma} \mathbf{\Gamma}(M \in R/R_g) \\ \displaystyle\int_{\forall M \in \Sigma} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{\Gamma}(M \in R/R_g)\,\mathrm{d}m \end{array} \right\}_A .$$

En utilisant les formules issues du principe de conservation de la masse :

$$\{\mathcal{A}_e(\Sigma \in R/R_g)\} = -\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{\Gamma}(G/R_g) \\ \mathbf{AG} \wedge m\Gamma(G/R_g) + \left.\dfrac{\mathrm{d}J(G,\Sigma)\mathbf{\Omega}(R/R_g)}{\mathrm{d}t}\right|_{R_g} \end{array} \right\}_A .$$

On construit de même le torseur « des forces d'inertie de Coriolis » de Σ dans son mouvement par rapport à R et R_g.

$$\{\mathcal{A}_c(\Sigma \in R/R_g)\} = -\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{\forall M \in \Sigma} 2\mathbf{\Omega}(R/R_g) \wedge \mathbf{V}(M/R_g)\,\mathrm{d}m \\ \displaystyle\int_{\forall M \in \Sigma} \mathbf{AM} \wedge \left[2\mathbf{\Omega}(R/R_g) \wedge \mathbf{V}(M/R)\right]\,\mathrm{d}m \end{array} \right\}_A .$$

Avec ces conventions le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors dans le repère non-galiléen R (et toujours avec le même point pour les moments) :

$$\{\ \mathcal{D}(\Sigma/R)\ \} = \{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma)\ \} + \{\mathcal{A}_e(\Sigma \in R/R_g)\} + \{\mathcal{A}_c(\Sigma \in R/R_g)\}\,.$$

Pour l'écriture du PFD dans un repère non galiléen, les composantes du torseur dynamique issues du mouvement de R par rapport à R_g sont placées du côté droit de l'égalité - avec le signe moins - elles sont alors manipulées comme des torseurs des actions mécaniques. On parle alors de torseurs des actions d'entraînement et de Coriolis. Ce ne sont pas pour autant des torseurs d'actions mécaniques au sens usuel du terme.

EXEMPLE : ACCÉLÉRATION DE LA PESANTEUR

Considérons un fil à plomb en équilibre à la surface de la Terre, matérialisant la verticale en un lieu donné. On choisit un repère galiléen R_g (O, x_g, y_g, z_g), centré sur le centre de la Terre et dont les axes pointent vers des directions stellaires.
Un second repère $R(O, x, y, z_g)$ est attaché à la Terre et en rotation uniforme par rapport à R_g autour de z_g à la vitesse ω (un tour en 24 heures). On pose $\theta = (x_g, x)$ avec $\theta = \omega t$.
Le fil à plomb, constitué d'un fil de masse négligeable et d'une sphère S, de masse m, de centre d'inertie G est situé dans le plan méridien (O, z_g, x). On pose : $\mathbf{OG} = r\mathbf{n}$, $\alpha = (\mathbf{n}, \mathbf{x})$ et $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire du plan méridien (O, z_g, x) normal à la Terre et dirigé vers le ciel, $\mathbf{t}$ est un vecteur unitaire du plan méridien (O, z_g, x) normal à $\mathbf{n}$, α est la latitude du point G. Le fil à plomb est en équilibre dans le repère R. Soit $\mathbf{\Omega}(S/R_g) = \omega\,\mathbf{z}_g$. On peut donc considérer S et R comme équivalents pour la dérivation.
La sphère S est soumise à deux actions mécaniques, représentables au point G par deux forces, $\mathbf{T}$: la tension du fil, de même direction que le fil, $\mathbf{F}_a$: la force d'attraction newtonienne de la Terre, telle que $\mathbf{F}_a = \mathcal{G}(mM_T/r^2)\mathbf{n}$ où m est la masse de la sphère, M_T la masse de la Terre ($M_T = 5,974210^{24}$ kg), $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle ($\mathcal{G} = 6,6710^{-11}$) et r la distance entre les centres d'inertie de la Terre et de la sphère.

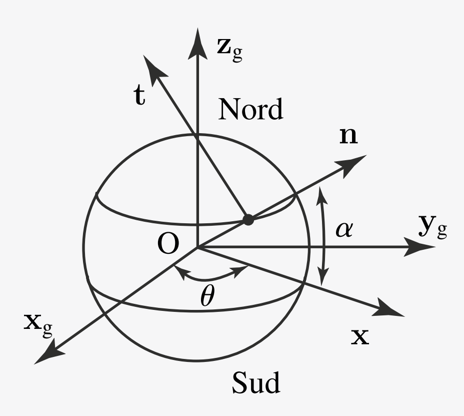


Figure 7.1 **Attraction terrestre.**

Le torseur dynamique de la sphère S au point G vaut :

$$\left\{\ \mathcal{D}(\Sigma/R_g)\ \right\} = -\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{\Gamma}(G/R_g) \\ \boldsymbol{\delta}(G,\ S/R_g) \end{array} \right\} = -\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{\Gamma}(G/R_g) \\ \dfrac{d\left(J(G,\Sigma)\mathbf{\Omega}(S/R_g)\right)}{dt} = \mathbf{0} \end{array} \right\}.$$

Par ailleurs les actions mécaniques appliquées au point G se réduisent, à la tension du fil $\mathbf{T}$ et à la force d'attraction gravitationnelle $\mathbf{F}_a$. Soit :

$$\left\{ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{T} + \mathbf{F}_a \\ \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_G .$$

En appliquant maintenant le principe de la résultante dynamique on en déduit :

$$\mathbf{T} = m\Gamma(G \in S/R_g) - \mathbf{F}_a = m\Gamma(G \in S/R_g) + \mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2}\mathbf{n}.$$

Dans le repère terrestre, le fil à plomb est en équilibre sous l'action de deux forces, la tension du fil et le poids de la sphère $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$. Ceci permet d'en déduire l'expression de l'accélération de la pesanteur dans le repère terrestre :

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} = \mathbf{O} \to \mathbf{g} = -G\frac{mM_T}{r^2}\mathbf{n} - \mathbf{\Gamma}(G \in S/R_g).$$

En utilisant maintenant la formule de changement de point du vecteur accélération :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(G \in S/R_g) = \mathbf{\Gamma}(O \in S/R_g) + &\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Omega}(S/R_g)}{\mathrm{d}t}\right|_R \\ &\wedge \mathbf{OG} + \mathbf{\Omega}(S/R_g) \wedge \left[\mathbf{\Omega}(S/R_g) \wedge \mathbf{OG}\right]. \end{aligned}$$

On en déduit : $\mathbf{\Gamma}(G \in S/R_g) = \omega\mathbf{z}_g \wedge \left[\omega\mathbf{z}_g \wedge r\mathbf{n}\right] = -r\omega^2 \cos\alpha\, \mathbf{x}$. Soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2}\mathbf{n} + r\omega^2 \cos\alpha \mathbf{x} \\ &= \left[-\mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2}\mathbf{n} - r\omega^2\cos^2\alpha\right]\mathbf{n} - r\omega^2 \cos\alpha \sin\alpha \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur accélération de la pesanteur, relatif au repère terrestre n'est-il pas exactement dirigé vers le centre de la Terre sauf à l'équateur et aux pôles. La composante tangentielle de l'accélération de la pesanteur, g_t, reste inférieure à 1% de sa composante normale en deçà de 5 000 km d'altitude.

8 PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES

8.1 INTRODUCTION : UN PEU D'HISTOIRE

En 1743, d'Alembert (1717-1783) publie le « *Traité de dynamique* », dans lequel il expose le principe « de la conservation des forces vives » aujourd'hui appelé principe de d'Alembert. L'énoncé du principe de d'Alembert est le suivant : « si l'on imagine un système de corps en mouvement, liés entre eux d'une manière quelconque, et réagissant les uns sur les autres au moyen de ces liaisons, de manière à modifier les mouvements que chaque corps isolé prendrait en vertu des seules forces qui l'animent, on pourra considérer ces mouvements comme composés :

1. des mouvements que les corps prennent effectivement, en vertu des forces qui les animent séparément, combinées avec les réactions du système ;
2. d'autres mouvements qui sont détruits par suite des liaisons du système.

Il en résulte que les mouvements ainsi détruits doivent être tels que les corps animés de ces seuls mouvements se feraient équilibre au moyen des liaisons du système ».
On pourra noter que, par rapport au principe fondamental de la dynamique de Newton, l'objet du traité de dynamique de d'Alembert est le comportement de systèmes de solides présentant des liaisons ou en contact mutuel. En 1788, Lagrange publie la *Méchanique analitique* qui est fondée sur un nouveau principe variationnel, issu de l'association du principe des vitesses virtuelles et de celui de d'Alembert. Lagrange écrit que le travail total des forces appliquées et des forces d'inertie est nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons. Lagrange aboutit ainsi, pour les systèmes conservatifs, à un système d'équations différentielles universel liant les dérivées de la « force vive » (assimilable à notre énergie cinétique) et celles de la fonction de force (qui joue le même rôle que l'énergie potentielle).

8.2 ÉNONCÉ DU PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES

À tout instant t, pour tout système matériel S, et pour tout champ de vitesse virtuelle, la puissance virtuelle des quantités d'accélération galiléenne est égale à la somme de la puissance virtuelle des actions extérieures et de la puissance virtuelle des actions intérieures à S. En mécanique des solides indéformables, on utilise des champs de vitesses virtuelles dont la restriction sur chacun des solides est le champ des moments d'un torseur, afin de respecter la rigidité de chacun de ces solides. Par

conséquent, la puissance virtuelle des actions intérieures à chacun des solides d'un système de solides est nulle, la puissance virtuelle des efforts intérieurs se réduit donc à la puissance virtuelle des interactions entre les solides du système. Cela se note, pour un système de solides Σ et un champ de vitesses virtuelles quelconque $\mathcal{V}^*$, dont la restriction sur chacun des solides S_i constituant Σ est le champ des moments d'un torseur noté $\{\mathcal{V}^*\}_i$, de la manière suivante :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\ \mathcal{D}(S_i/R_g)\ \right\}\{\mathcal{V}^*\}_i = \sum_{i=1}^{n} P^*(\overline{\Sigma} \rightarrow S_i,\ R_g) + \sum_{i=1}^{n} P^*(S_i \leftrightarrow S_j) \quad \forall \mathcal{V}^*.$$

8.3 Choix de torseurs virtuels particuliers et théorèmes de la dynamique

8.3.1 Torseur global quelconque : équivalence du principe des puissances virtuelles et du principe fondamental de la dynamique

Si le champ des vitesses virtuelles $\mathcal{V}^*$ est en totalité le champ des moments d'un torseur $\{\mathcal{V}^*\}$ quelconque, le principe des puissances virtuelles conduit à :

$$\left\{\ \mathcal{D}(\Sigma/R_g)\ \right\}\{\mathcal{V}^*\} = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\ \right\}\{\mathcal{V}^*\} \quad \forall \{\mathcal{V}^*\}.$$

On retrouve ainsi le principe fondamental de la dynamique sous la forme :

$$\left\{\ \mathcal{D}(\Sigma/R_g)\ \right\} = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\ \right\}.$$

8.3.2 Torseur des vitesses galiléennes : théorème de l'énergie cinétique

a) Théorème de l'énergie cinétique pour un solide unique

Si le champ des vitesses virtuelles $\mathcal{V}^*$ est le champ des moments du torseur des vitesses galiléennes $\left\{\ \mathcal{V}(S_i/R_g)\ \right\}$, le principe des puissances virtuelles pour un solide S_i, conduit à :

$$\left\{\ \mathcal{D}(S_i/R_g)\ \right\} \cdot \left\{\ \mathcal{V}(S_i/R_g)\ \right\} = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{S_i} \rightarrow S_i)\ \right\} \cdot \left\{\ \mathcal{V}(S_i/R_g)\ \right\}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\left\{\ \mathcal{D}(S_i/R_g)\ \right\} \cdot \left\{\ \mathcal{V}(S_i/R_g)\ \right\} &= \int_{S_i} \mathbf{\Gamma}(M/R_g)\mathrm{d}m(M) \cdot \mathbf{V}(M/R_g) \\ &= \int_{S_i} \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(M/R_g)^2}{\mathrm{d}t}\right|_{R_g} \mathrm{d}m(M).\end{aligned}$$

En appliquant le principe de conservation de la masse

$$\left\{ \mathcal{D}(S_i/R_g) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_i/R_g) \right\} = \left. \frac{\mathrm{d}\int_{S_i} \mathbf{V}(M/R_g)^2 \mathrm{d}m(M)}{\mathrm{d}t} \right|_{R_g} = \frac{\mathrm{dT}(S_i/R_g)}{\mathrm{d}t},$$

on retrouve ainsi le théorème de l'énergie cinétique pour un solide S_i qui s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{dT}(S_i/R_g)}{\mathrm{d}t} = P(\overline{S}_i \rightarrow S_i/R_g).$$

b) Théorème de l'énergie cinétique pour un système de solides

Si maintenant on considère un système de solides Σ, constitué de n solides S_i, il suffit de faire la somme des équations issues du théorème de l'énergie pour chacun des n solides, soit :

$$\frac{\mathrm{dT}(\Sigma/R_g)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{dT}(S_i/R_g)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathcal{A}(\overline{S}_i \rightarrow S_i) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_i/R_g) \right\},$$

$$\frac{\mathrm{dT}(\Sigma/R_g)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left\{ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \rightarrow S_i) \right\} + \sum_{j \neq i} \left\{ \mathcal{A}(\overline{S}_j \rightarrow S_i) \right\} \right] \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_i/R_g) \right\}.$$

En rassemblant terme à terme et en ré-arrangeant on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dT}(\Sigma/R_g)}{\mathrm{d}t} = & \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \rightarrow S_i) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_i/R_g) \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \left\{ \mathcal{A}(\overline{S}_j \rightarrow S_i) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_i/S_j) \right\} \end{aligned}.$$

Le théorème de l'énergie cinétique pour un système de solides s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{dT}(\Sigma/R_g)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{P(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma,\ R_g)}_{\text{Puissance galiléenne des efforts extérieurs}} + \underbrace{P(S_i \leftrightarrow S_j)}_{\text{Puissance des efforts intérieurs}}.$$

c) Torseurs de Lagrange : équations de Lagrange

• *Définition des torseurs de Lagrange*

Supposons que la position d'un solide S dans R_g soit paramétrée par n paramètres q_i et la variable temps t. Puisque le champ des vitesses de S est le champ des moments d'un torseur il vérifie :

$$\forall(P,\ Q) \in S \quad \mathbf{V}(Q/R_g) = \mathbf{V}(P/R_g) + \mathbf{\Omega}(S/R_g) \wedge \mathbf{PQ}.$$

Alors quel que soit le paramètre du mouvement q_i :

$$\forall(\mathrm{P},\ \mathrm{Q}) \in \mathrm{S} \quad \frac{\partial \mathbf{V}(\mathrm{Q}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_i} \wedge \mathbf{PQ} + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g}) \wedge \frac{\partial \mathbf{PQ}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Le dernier terme est nul car le vecteur **PQ** ne peut pas dépendre des dérivées des paramètres q_i du mouvement ; il reste donc :

$$\forall(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{S} \quad \frac{\partial \mathbf{V}(\mathrm{Q}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_i} \wedge \mathbf{PQ}.$$

Ainsi, les champs $\dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_i}$ sont également des torseurs, appelés torseurs de Lagrange et notés $\{\mathcal{V}_{q_i}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})\}$, avec :

$$\{\mathcal{V}_{q_i}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})\} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_i} \\[2ex] \dfrac{\partial \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_i} \end{array} \right\}_{\mathrm{A}}.$$

- *Conséquences*

Conséquence n°1. Comme les paramètres q_i sont les paramètres du mouvement :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{S} \quad \mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_g}) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i}\right|_{\mathrm{R_g}} \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \left.\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial t}\right|_{\mathrm{R_g}}.$$

En dérivant une seconde fois, les paramètres $(q_i, \dot{q}_i, t)$ étant indépendants, on trouve :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{S} \quad \frac{\partial \mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_i} = \left.\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i}\right|_{\mathrm{R_g}}.$$

Il est très important de bien comprendre que les paramètres position et vitesse sont *a priori* indépendants. Ce n'est qu'une fois les conditions initiales posées pour un problème donné qu'ils sont liés. On peut s'en convaincre avec l'exemple suivant. J'ai un pendule dont j'observe la vitesse lorsqu'il passe par sa position d'équilibre stable (à la verticale pour un pendule classique). La vitesse dépendra évidemment - pour cette position donnée - de l'impulsion fournie lors de la mise en mouvement. On a bien pour un même q_i des $\dot{q}_i$ différents. Ce point est souvent délicat à comprendre.

Conséquence n°2. Le produit du torseur dynamique du solide S par un torseur de Lagrange est noté $P_{q_i}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})$ et vaut

$$P_{q_i}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g}) = \left\{ \ \mathcal{D}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g}) \ \right\} \cdot \{\mathcal{V}_{q_i}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})\}.$$

Compte tenu de ce qui vient d'être montré :

$$P_{q_i}(S/R_g) = \int_{\forall P \in S} \mathbf{\Gamma}(P/R_g) \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i} dm(P),$$

or :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{V}(P/R_g)^2}{\partial \dot{q}_i}\bigg|_{R_g} = \mathbf{V}(P/R_g) \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i},$$

et par suite :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{V}(P/R_g)^2}{\partial \dot{q}_i} \right]_{R_g} = \frac{d\mathbf{V}(P/R_g)}{dt}\bigg|_{R_g} \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i} + \mathbf{V}(P/R_g) \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i} \right]_{R_g}.$$

Soit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{V}(P/R_g)^2}{\partial \dot{q}_i} \right]_{R_g} = \mathbf{\Gamma}(P/R_g) \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i}\bigg|_{R_g} + \mathbf{V}(P/R_g) \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i} \right]_{R_g}.$$

Par ailleurs :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{V}(P/R_g)^2}{\partial q_i} = \mathbf{V}(P/R_g) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(P/R_g)}{\partial q_i} = \mathbf{V}(P/R_g) \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i} \right]_{R_g}.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} P_{q_i}(S/R_g) &= \int_{P \in S} \mathbf{\Gamma}(P/R_g) \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i} dm(P) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) T(S/R_g) \end{aligned}.$$

L'opération $\left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$ est appliquée à l'énergie cinétique T.

- *Application du PPV à un unique solide S*

Si, pour écrire le principe des puissances virtuelles, on choisit comme champ de vitesses virtuelles $\mathcal{V}^*$ le champ des moments du torseur de Lagrange $\{\mathcal{V}_{q_i}(S/R_g)\}$, on obtient alors pour chacun des paramètres q_i, l'équation suivante :

$$\{\ \mathcal{D}(S/R_g)\ \} \cdot \{\mathcal{V}_{q_i}(S/R_g)\} = \{\ \mathcal{A}(\overline{S} \to S)\ \} \cdot \{\mathcal{V}_{q_i}(S/R_g)\}.$$

Le second membre est alors noté $Q_{q_i}(\overline{S} \to S/R_g)$ et est appelée la i^e composante des efforts extérieurs généralisés sur S. Le principe des puissances virtuelles s'écrit alors sous la forme d'équations de Lagrange :

$$P_{q_i}(S/R_g) = Q_{q_i}(\overline{S} \to S/R_g).$$

Avec

$$P_{q_i}(S/R_g) = \left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) T(S/R_g)$$

$$Q_{q_i}(\overline{S} \to S/R_g) = \left\{ \mathcal{A}(\overline{S} \to S) \right\} \cdot \{\mathcal{V}_{q_i}(S/R_g)\}\,.$$

On note qu'on obtient autant d'équations de Lagrange qu'il y a de paramètres du mouvement, ce qui permet de résoudre le problème.

Remarque

L'intérêt des équations de Lagrange est que, une fois calculé l'énergie cinétique et le second membre, il ne reste que des opérations automatisables (les dérivées).

- *Application du PPV à un système de solides Σ*

On écrit alors que la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle des efforts extérieurs, plus la puissance virtuelle des efforts intérieurs. Soit :

$$P_{q_i}(\Sigma/R_g) = Q_{q_i}(\overline{\Sigma} \to \Sigma/R_g) + Q_{q_i}(\Sigma \to \Sigma).$$

Comme nous l'avons fait pour l'énergie cinétique, on trouve la puissance virtuelle des efforts intérieurs en écrivant le PPV pour chacun des solides puis en regroupant les termes deux à deux, alors :

$$\begin{aligned} Q_{q_i}(\Sigma \to \Sigma) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} \left\{ \mathcal{A}(\overline{S}_j \to S_i) \right\} \cdot \left[\{\mathcal{V}_{q_i}(S_i/R_g)\} - \{\mathcal{V}_{q_i}(S_j/R_g)\}\right], \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} \left\{ \mathcal{A}(\overline{S}_j \to S_i) \right\} \cdot \{\mathcal{V}_{q_i}(S_i/S_j)\}\,. \end{aligned}$$

- *Fonction de force*

Définition

On dit que les actions mécaniques d'une partie S_e extérieure à Σ sur une partie S_i intérieure à Σ dérivent d'une fonction de force, si il existe une fonction U des variables $(q_i(t))$ telle que :

$$\forall i = 1,\ n \quad Q_{q_i}(S_e \to S_i/R_g) = \frac{\partial U(S_e \to S_i/R_g)}{\partial q_i}.$$

L'existence d'une fonction de force simplifie considérablement le calcul de Q_{q_i}, mais reste évidemment limitée à un petit nombre d'interactions.

Relation entre fonction de force et énergie potentielle. On rappelle que l'on peut associer une énergie potentielle aux actions extérieures (exercées par un solide S_e) sur un solide S_i, en mouvement par rapport à R, si il existe une fonction scalaire E_p telle que :

$$P(S_e \to S_i/R) = -\frac{dE_p(S_e \to S_i/R)}{dt},$$

où $P_e(S_e \to S_i/R)$ est la puissance des actions extérieures à S_i (exercées par S_e) sur S_i. En développant par rapport aux paramètres du mouvement :

$$\begin{aligned} P(S_e \to S_i/R) &= -\frac{dE_p(S_e \to S_i/R)}{dt}, \\ &= -\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E_p(S_e \to S_i/R)}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial E_p(S_e \to S_i/R)}{\partial t}\right]. \end{aligned}$$

L'existence d'une énergie potentielle E_p entraîne l'existence d'une fonction de force U, telle que $U = -E_p$. **Attention** la réciproque n'est pas vraie !



On étudie un ressort de traction compression R (raideur k, longueur libre l_0 et de masse négligeable) monté entre deux solides, T le cylindre et M la masse. La liaison T-M est une glissière. On suppose que T est en mouvement par rapport à R_0 (O, x_0, y_0, z_0) d'un mouvement rectiligne vibratoire connu : $\mathbf{OH} = h \sin \omega t \mathbf{y}_0$. La position de M dans R_0 est repérée par le paramètre y tel que : $\mathbf{OP} = y\mathbf{y}_0$.

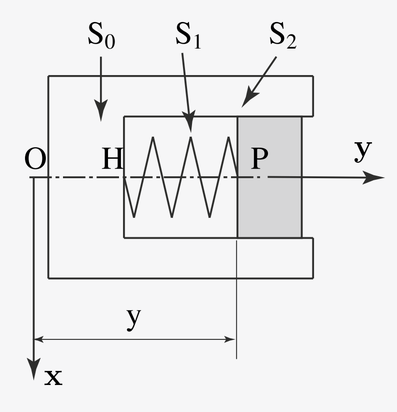


Figure 8.1 **Système masse ressort.**

Alors :

$$\left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_0)\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \\ \dot{y}\mathbf{y}_0 \end{array} \right\}_{\mathrm{P}} \text{ et } \left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{M}/\mathrm{T})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \\ (\dot{y} - h\omega\cos\omega t)\mathbf{y}_0 \end{array} \right\}_{\mathrm{P}}.$$

Par ailleurs :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{M})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -k(y - h\sin\omega t - l_0)\mathbf{y}_0 \\ \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\mathrm{P}}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{T} \overset{\mathrm{r}}{\leftrightarrow} \mathrm{M}) &= \left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{M})\ \right\} \cdot \left(\left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_0)\ \right\} - \left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{T}/\mathrm{R}_0)\ \right\}\right), \\ &= \left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{M})\ \right\} \cdot \left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{M}/\mathrm{T})\ \right\}. \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{T} \overset{\mathrm{r}}{\leftrightarrow} \mathrm{M}) &= -k(y - h\sin\omega t - l_0)(\dot{y} - h\omega\cos\omega t), \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{k}{2}(y - h\sin\omega t - l_0)^2\right). \end{aligned}$$

Il existe donc une énergie potentielle $\mathrm{E_p}$ pour les inter-efforts entre T et M par l'intermédiaire du ressort R. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{E_p}(\mathrm{T} \overset{\mathrm{r}}{\leftrightarrow} \mathrm{M}) &= \frac{k}{2}(y - h\sin\omega t - l_0)^2, \\ \mathrm{U}(\mathrm{T} \overset{\mathrm{r}}{\leftrightarrow} \mathrm{M}) &= -\frac{k}{2}(y - h\sin\omega t - l_0)^2. \end{aligned}$$

Alors :

$$Q_y(\mathrm{T} \overset{\mathrm{r}}{\leftrightarrow} \mathrm{M}) = \frac{\partial \mathrm{U}(\mathrm{T} \overset{\mathrm{r}}{\leftrightarrow} \mathrm{M})}{\partial y} = -k(y - h\sin\omega t - l_0).$$

On cherche maintenant à déterminer les Q_{q_i} associés aux efforts extérieurs exercés sur M par l'intermédiaire du ressort r :

$$\mathrm{P}(\mathrm{r} \rightarrow \mathrm{M}/\mathrm{R}_0) = \left\{\ \mathcal{A}(\mathrm{r} \rightarrow \mathrm{M})\ \right\} \cdot \left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_0)\ \right\} = -k(y - h\sin\omega t - l_0)\dot{y}.$$

Il n'existe pas d'énergie potentielle ici telle que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{r} \rightarrow \mathrm{M}/\mathrm{R}_0) = -k(y - h\sin\omega t - l_0)\dot{y}.$$

On calcule donc directement Q_y ; pour cela il faut calculer le torseur de Lagrange :

$$\left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_0)\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \\ \dot{y}\mathbf{y}_0 \end{array} \right\}_{\mathrm{P}} \quad \{\mathcal{V}_y(\mathrm{M}/\mathrm{R}_0)\} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left\{\ \mathcal{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_0)\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{y}_0 \end{array} \right\}_{\mathrm{P}}.$$

Alors :

$$Q_y(\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{M}/\mathrm{R}_0) = \left\{ \ \mathcal{A}(\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{M}) \ \right\} \cdot \left\{\mathcal{V}_y(\mathrm{M}/\mathrm{R}_0)\right\},$$

soit :

$$Q_y(\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{M}/\mathrm{R}_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{k}{2}(y - h\sin\omega t - l_0)^2\right).$$

Donc, bien qu'il n'existe pas d'énergie potentielle dans ce cas, il existe néanmoins une fonction de force U. Si l'on suppose maintenant que le mouvement de T par rapport à M est libre et paramétré par λ tel que : $\mathbf{OH} = \lambda \mathbf{y}_0$ tandis que le mouvement de M par rapport à T est paramétré par γ tel que $\mathbf{HP} = l\mathbf{y}_0$. Alors :

$$\left\{ \ \mathcal{V}(\mathrm{r}/\mathrm{R}_0) \ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \\ (\dot{\lambda} + \dot{l})\mathbf{y}_0 \end{array} \right\}_{\mathrm{P}} \qquad \left\{\mathcal{V}_\lambda(\mathrm{r}/\mathrm{R}_0)\right\} = \left\{\mathcal{V}_l(\mathrm{r}/\mathrm{M}_0)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{y}_0 \end{array} \right\}_{\mathrm{P}}.$$

Par ailleurs :

$$\left\{ \ \mathcal{A}(\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{M}) \ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -(k(l - l_0)\mathbf{y}_0 \\ \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\mathrm{P}}.$$

Alors :

$$Q_\lambda(\mathrm{r} \rightarrow \mathrm{M}/\mathrm{R}_0) = Q_l(\mathrm{r} \rightarrow \mathrm{M}/\mathrm{R}_0) = -k(l - l_0).$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial l}Q_\lambda(\mathrm{r} \rightarrow \mathrm{M}/\mathrm{R}_0) = -k \text{ et } \frac{\partial}{\partial \lambda}Q_\lambda(\mathrm{r} \rightarrow \mathrm{M}/\mathrm{R}_0) = 0.$$

Les deux dérivées partielles sont distinctes donc la fonction de force U n'existe pas. Cet exemple montre qu'il faut être très rigoureux dans la définition des grandeurs à déterminer et que cela implique des notations complètes.

Action de la pesanteur. Dans un repère R (O, x, y , z) lié à la Terre on considère que l'accélération de la pesanteur **g** est dirigée selon la verticale à la surface (O, z) (ce qui est une approximation) et dirigée vers le bas. Alors, il existe une énergie potentielle associée à l'action de la pesanteur sur le solide S de masse m et de centre d'inertie G, dans son mouvement par rapport à la Terre :

$$\mathrm{E}_\mathrm{p}(\mathbf{g} \rightarrow \mathrm{S}/\mathrm{R}) = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{OG}.$$

Il existe donc également une fonction de force U associée :

$$\mathrm{U}_\mathrm{p}(\mathbf{g} \rightarrow \mathrm{S}/\mathrm{R}) = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{OG}.$$

Si le mouvement de G par rapport à R est paramétré par i paramètres q_i alors le calcul des Q_{q_i} est immédiat :

$$\forall \mathrm{i} = 1,\ \mathrm{n} \quad Q_q(\mathbf{g} \rightarrow \mathrm{S}/\mathrm{R}) = \frac{\partial \mathrm{U}_\mathrm{p}(\mathbf{g} \rightarrow \mathrm{S}/\mathrm{R})}{\partial q_\mathrm{i}} = m\mathbf{g}\frac{\partial \mathbf{OG}}{\partial q_\mathrm{i}}.$$

Ressort de traction-torsion. Deux solides S_1 et S_2 sont liés par une liaison pivot glissant dans laquelle est intercalée un ressort de traction-torsion de raideur K en traction-compression, de raideur C en torsion, de longueur à vide L_0 et de torsion à vide θ_0. Le paramètre L mesure la distance entre les deux solides le long de l'axe de la liaison et le paramètre θ mesure la rotation du solide S_2 par rapport au solide S_1. L'énergie potentielle pour les actions mutuelles de S_1 et S_2 s'écrit :

$$\mathrm{E_p}(\mathrm{S_1} \overset{\mathrm{R}}{\leftrightarrow} \mathrm{S_2}) = \frac{1}{2}K(L - L_0)^2 + \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2.$$

On en déduit la fonction de force pour les inter-efforts entre S_1 et S_2

$$\mathrm{U_p}(\mathrm{S_1} \overset{\mathrm{R}}{\leftrightarrow} \mathrm{S_2}) = -\frac{1}{2}K(L - L_0)^2 - \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2.$$

Les mouvements relatifs de S_1 et S_2 sont paramétrés ici par les deux paramètres L et θ, donc :

$$\begin{aligned} Q_L(\mathrm{S_1} \overset{\mathrm{R}}{\leftrightarrow} \mathrm{S_2}) &= \frac{\partial \mathrm{U}(\mathrm{S_1} \overset{\mathrm{R}}{\leftrightarrow} \mathrm{S_2})}{\partial L} = -K(L - L_0), \\ Q_\theta(\mathrm{S_1} \overset{\mathrm{R}}{\leftrightarrow} \mathrm{S_2}) &= \frac{\partial \mathrm{U}(\mathrm{S_1} \overset{\mathrm{R}}{\leftrightarrow} \mathrm{S_2})}{\partial \theta} = -C(\theta - \theta_0). \end{aligned}$$

d) Application de la méthode de Lagrange et paramétrage du mouvement

• *Résumé et mise en forme des problèmes*

Rappel sur les hypothèses des équations de Lagrange. Pour établir les équations de Lagrange, on applique le principe des puissances virtuelles, avec comme champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible, les torseurs cinématiques de Lagrange $\{\mathcal{V}_{q_i}(\mathrm{S/R_g})\}$ avec :

$$\{\mathcal{V}_{q_i}(\mathrm{S/R_g})\} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S_j/R_g})}{\partial \dot{q}_i} \\[2ex] \dfrac{\partial \mathbf{V}(\mathrm{A} \in \mathrm{S_j/R_g})}{\partial \dot{q}_i} \end{array} \right\}_{\mathrm{A}}.$$

On suppose que les $(q_i, \dot{q}_i, t)$ sont indépendants. Cette hypothèse est cruciale. Ceci permet d'établir autant d'équations qu'il y a de paramètres q_i du mouvement. Chacune des équations s'écrit, dans le cas le plus général, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{L(T(S/R_g))} &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \mathrm{S_j}) \right\} \cdot \{\mathcal{V}_{q_i}(\mathrm{S_j/R_g})\}, \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k>j}^{n} \left\{ \mathcal{A}(\mathrm{S_k} \to \mathrm{S_j}) \right\} \cdot \{\mathcal{V}_{q_i}(S_j/S_k)\}. \end{aligned}$$

Lorsque l'action mécanique dérive d'une fonction de force, le calcul de Q_{q_i} est grandement simplifié :

$$\forall \mathrm{i} = 1,\ \mathrm{n} \quad Q_{q_i}(\mathrm{S_e} \to \mathrm{S_i}/\mathrm{R_g}) = \frac{\partial \mathrm{U}(\mathrm{S_e} \to \mathrm{S_i}/\mathrm{R_g})}{\partial q_i}.$$

Dans le cas d'un système de solides, des équations de liaisons apparaissent. Les paramètres ne sont alors plus indépendants. Néanmoins, pour l'écriture des équations de Lagrange, on commence par faire l'hypothèse que les paramètres du mouvement sont indépendants. Nous avons donc deux possibilités :

1. Lorsque c'est possible, employer l'équation de liaison pour éliminer le paramètre du mouvement. On revient alors à un problème à paramètres indépendants.
2. Conserver le paramètre, écrire les équations de Lagrange, puis adjoindre ensuite l'équation de liaison au système d'équation obtenu. On travaille alors avec un système à paramètres liés. Naturellement, lorsqu'on ajoute une équation de liaison, il faut aussi ajouter une inconnue. Cette inconnue est l'action de liaison associée au paramètre du mouvement contraint.

Les équations de liaison peuvent être réparties en deux groupes, les équations holonomes et les équations non-holonomes.

Équations holonomes. Les équations de liaisons holonomes portent sur les paramètres du mouvement q_i et sont du type : $f_j(q_1, q_2, ..., q_n, t) = 0$ pour j = 1 à h, où h est le nombre de liaisons holonomes. Par dérivation composée par rapport au temps, on obtient directement une équation sur les vitesses de variations des paramètres du mouvement :

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f_j}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial f_j}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(q_k,\ t)\dot{q}_i = b_j(q_k,\ t) \quad \mathrm{j} = 1 \text{ à h}.$$

Chaque équation de liaison holonome permet donc d'éliminer complètement un paramètre du mouvement, puisqu'on peut éliminer à la fois q_i et $\dot{q}_i$.

Équations non-holonomes. Les équations de liaisons non-holonomes portent sur les paramètres du mouvement q_i et les vitesses de variations de ces paramètres $\dot{q}_i$ (exemple : un roulement sans glissement), elles sont du type suivant, avec k le nombre de liaisons non-holonomes :

$$f_j(q_1,\ q_2, ...,\ q_n, \dot{q}_1,\ \dot{q}_2, ...,\ \dot{q}_n,\ t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(q_k,\ t)\dot{q}_i = b_j(\mathrm{k},\ t) \quad \mathrm{j} = 1 \text{ à k}.$$

Dans certains cas, l'équation est intégrable et l'on connaît les valeurs des paramètres du mouvement à l'instant initial, on se ramène alors à une équation holonome. Dans le cas général, comme on ne dispose que d'une seule équation, on ne peut pas éliminer à la fois q_i et $\dot{q}_i$ supposés indépendants. On doit donc conserver le paramètre du

mouvement q_p dans le paramétrage. Les paramètres du mouvement sont donc nécessairement liés. Une inconnue supplémentaire de type action de liaison doit alors être adjointe au système.

Inconnues et équations du problème. Les équations du problème sont donc en général, les équations de Lagrange et les équations de liaison non-holonomes (toujours) et holonomes (si nécessaire). Les inconnues du problème peuvent être uniquement des paramètres du mouvement (liés ou indépendants), mais peuvent également être des actions de liaison, une action de contact par exemple. Si l'on écrit une équation de liaison non-holonome, on devra toujours adjoindre une action de liaison inconnue complémentaire (ou, sinon, introduire un multiplicateur de Lagrange).

Par ailleurs, on peut vouloir déterminer des actions mécaniques supplémentaires, par exemple un effort tranchant sur une poutre. Ce dernier cas nous ramène directement à l'énoncé original du principe de d'Alembert. Si l'on cherche à déterminer une action de liaison inconnue, on pourra imaginer un paramétrage non-compatible avec cette liaison. On ajoute un degré de liberté imaginaire au système, complémentaire de l'action mécanique cherchée. Ce mouvement imaginaire non-compatible avec la liaison réelle fait « travailler » l'action de liaison inconnue, qui apparaît alors dans les équations de Lagrange. La solution réelle du problème est telle que la liaison se trouve en équilibre et « détruit » donc le mouvement imaginaire. Ce qui revient à adjoindre l'équation de liaison sur le paramètre supplémentaire, au système d'équations de Lagrange obtenu.
En conclusion, pour un même problème, le choix du paramétrage dépendra des objectifs du calcul et pas uniquement de la mobilité réelle du système.

• *Lagrange avec multiplicateur*

Pour établir les équations de Lagrange, on applique le principe des puissances virtuelles, avec comme champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible, les torseurs cinématiques de Lagrange $\{\mathcal{V}_{q_i}(S/R_g)\}$. On peut aussi prendre toute combinaison linéaire des torseurs cinématiques de Lagrange comme torseur cinématique virtuel. Alors :

$$\{\ \mathcal{V}(S/R_g)\ \}^* = \sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{V}_{q_i}(S/R_g)\}\, \dot{q}_i^* \quad \forall \dot{q}_i^*.$$

L'application du PPV donne alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} L(\Sigma/R_g) &= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^* Q_{q_i}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g)\\ &+ \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^* \sum_{i,\,j=1,\,h<j}^{n} Q_{q_i}(S_h \leftrightarrow S_j).\end{aligned}$$

Mais on veut, en outre, que le champ de vitesse virtuelle soit compatible avec les k équations de liaison du problème. Ces équations, sont issues d'équations sur les

vitesses, ou sur les positions. Par exemple, les équations non-holonomes de liaison pour un contact sans glissement d'un solide S sur un plan P, au point I, s'écriront :

$$\mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{S}/\mathrm{P}) \cdot \mathbf{x}_\mathrm{P} = \mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{S}/\mathrm{P}) \cdot \mathbf{y}_\mathrm{P} = 0,$$

où $(\mathbf{x}_\mathrm{p}, \mathbf{y}_\mathrm{p}, \mathbf{z}_\mathrm{p})$ est la base attachée à P, z_p étant la normale à la surface de contact au point I. Les équations de liaison « virtualisées » s'obtiennent de la même manière, mais appliquées cette fois au champ des vitesses virtuel, tel qu'il a été construit ici :

$$\mathbf{V}^*(\mathrm{P} \in \mathrm{S}/\mathrm{R_g}) \cdot \mathbf{x}_\mathrm{p} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \dot{q}_\mathrm{i}^* \frac{\partial \mathbf{V}(\mathrm{P} \in \mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{p}.$$

Ainsi, lorsqu'on travaille avec un problème à paramètres liés, les équations de liaisons, holonomes ou non, peuvent se mettre sous la forme :

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} a_{\mathrm{ji}}(q_\mathrm{k}, t)\dot{q}_\mathrm{i} = b_\mathrm{j}(q_\mathrm{k}, t) \quad \mathrm{j} = 1 \text{ à } \mathrm{k}.$$

Les équations de liaisons virtualisées sont alors telles que :

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{ji}}(q_\mathrm{k}, t)\dot{q}_\mathrm{i}^* = 0 \quad \mathrm{j} = 1 \text{ à } \mathrm{k}.$$

En conclusion, le PPV, écrit avec un champ virtuel compatible avec les équations de liaison, donne :

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \dot{q}_\mathrm{i}^* P_{q_\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \dot{q}_\mathrm{i}^* Q_{q_\mathrm{i}} \forall(\dot{q}_\mathrm{i}^*, \mathrm{i} = 1, \mathrm{n}) \text{ tels que } \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{ji}}(q_\mathrm{k}, t)\dot{q}_\mathrm{i}^* = 0, \mathrm{j} = 1, \mathrm{k}.$$

Un théorème classique permet d'écrire ceci, sous la forme équivalente suivante, en introduisant k scalaires λ_j tels que :

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \dot{q}_\mathrm{i}^* P_{q_\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \dot{q}_\mathrm{i}^* Q_{q_\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \dot{q}_\mathrm{i}^* Q_{q_\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \lambda_\mathrm{j} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{ji}}(q_\mathrm{k}, t)\dot{q}_\mathrm{i}^* \quad \forall \dot{q}_\mathrm{i}^*, \mathrm{i} = 1, \mathrm{n}.$$

Alors, en inversant les signes somme et en rassemblant, le PPV peut désormais s'écrire :

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \dot{q}_\mathrm{i}^* P_{q_\mathrm{i}} - Q_{q_\mathrm{i}} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \lambda_\mathrm{j} a_{\mathrm{ji}}(q_\mathrm{k}, t)) = 0 \quad \forall(\dot{q}_\mathrm{i}^*, \mathrm{i} = 1, \mathrm{n}),$$

ce qui implique :

$$P_{q_\mathrm{i}} = Q_{q_\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \lambda_\mathrm{j} a_{\mathrm{ji}}(q_\mathrm{k}, t)) \quad \forall \mathrm{i} = 1, \mathrm{n}.$$

Avec les notations appropriées, on trouve un système de n équations de Lagrange à multiplicateurs :

$$\mathcal{L}(\Sigma/\mathrm{R_g}) = Q_{q_i}(\overline{\Sigma} \to \Sigma/\mathrm{R_g}) + Q_{q_i}(\mathrm{S_h} \leftrightarrow \mathrm{S_j}) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_{ji}(q_k,\ t) \quad \forall i = 1,\ n,$$

auquel il faut adjoindre les *k* équations de liaisons réelles :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(q_k,\ t)\dot{q}_i = b_j(q_k,\ t) \quad \forall j = 1, k.$$

Le système a pour inconnues les n paramètres de mouvement q_i, auquel il faut ajouter les k multiplicateurs de Lagrange λ_j.

- ***Problèmes à paramètres liés, bilan des méthodes***

Inconnues du problème	Nb inc.	Équations	Nb d'équ.
Paramètres du mouvement	n + h	Équations de Lagrange	n + h
Actions de liaison	a	Équations de liaisons	k + h

En règle générale, on commence par éliminer du problème les h paramètres du mouvement correspondant aux h équations de liaisons holonomes. Si a = k le nombre total d'inconnues n + a est égal au nombre total d'équations. On peut résoudre directement.

Inconnues du problème	Nb inc.	Équations	Nb d'équ.
Paramètres du mouvement	n	Équations de Lagrange	n
Actions de liaison	a	Équations de liaisons	k = a

Si k > a le nombre total d'équations est plus grand que le nombre d'inconnues. Des actions de liaison complémentaires sont à ajouter.
Première méthode : *champ des vitesses virtuelles compatible avec les liaisons et multiplicateurs de Lagrange*. On ajoute (k − a) inconnues, homogènes à des actions de liaisons, appelées « multiplicateurs de Lagrange ». Le système compte alors autant d'inconnues que d'équations :

Inconnues du problème	Nb inc.	Équations	Nb d'équ.
Paramètres du mouvement	n	Équations de Lagrange	n
Actions de liaison	a	Équations de liaisons	k
Multiplicateurs de Lagrange	k − a		

Seconde méthode : *champ des vitesses virtuelles non-compatible et actions de liaison*. On introduit (k − a) actions de liaisons inconnues complémentaires correspondant aux degrés de libertés liés. Les actions de liaisons inconnues travaillent dans le mouvement virtuel non-compatible choisi et apparaissent donc dans le second membre des équations de Lagrange. Le système compte alors autant d'inconnues que d'équations :

Inconnues du problème	Nb inc.	Équations	Nb d'équ.
Paramètres du mouvement	n	Équations de Lagrange	n
Actions de liaison	a	Équations de liaisons	k
Actions de liaison complémentaires	k − a		

Si $k < a$ Le nombre d'inconnues du problème est plus grand que le nombre d'équations. Les inconnues « en trop » sont en général des actions de liaisons que l'on cherche à déterminer.
Une seule méthode : *paramétrage non-compatible.*
On modifie le paramétrage de façon à faire apparaître les (a − k) inconnues du mouvement manquantes complémentaires des actions mécaniques cherchées. Le paramétrage est alors totalement incompatible, puisqu'on autorise des mouvements normalement interdits par les liaisons. Les (a − k) actions de liaisons inconnues travaillent dans le mouvement virtuel incompatible choisi et apparaissent donc aussi dans le second membre des équations de Lagrange. On adjoint, ensuite, au système d'équations les équations de liaisons qui restaurent la compatibilité de la solution avec les liaisons réelles du système. Le système compte alors autant d'inconnues que d'équations :

Inconnues du problème	Nb inc.	Équations	Nb d'équ.
Param. du mouvement	n	Équ. de Lagrange	n
Param. du mouvement adjoints	a − k	Équ. de Lagrange adjointes	a − k
Actions de liaison	a	Équ. de liaisons	k
		Équ. de liaisons adjointes	a − k

ÉQUATIONS DE LAGRANGE AVEC MULTIPLICATEUR

On considère un cerceau C de rayon R et de centre d'inertie G qui roule sans glisser sur un plan P avec lequel il est en contact en un point I. On associe au plan P le repère galiléen R_g (O, X_0, Y_0, Z_0).

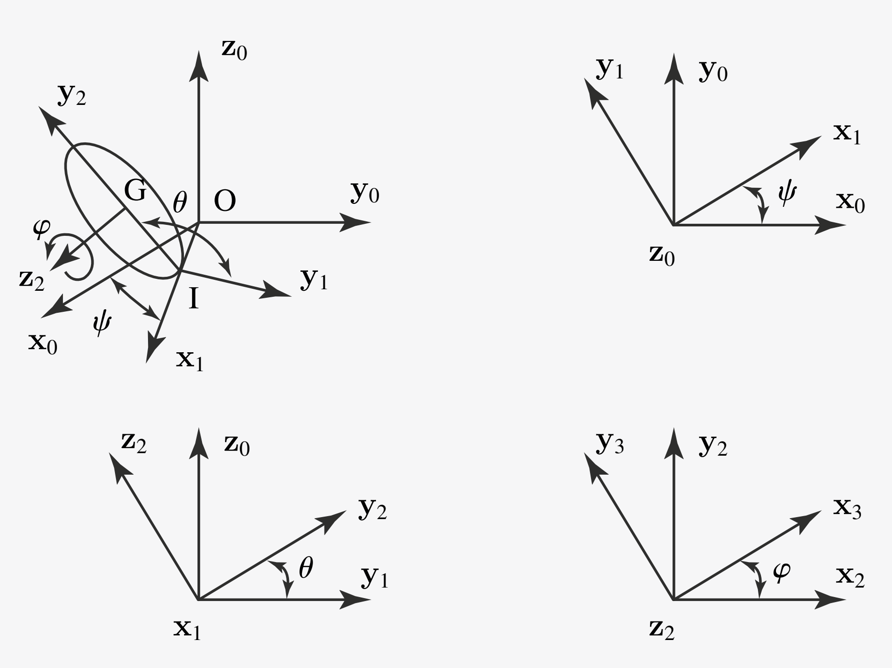


Figure 8.2 **Cerceau**

• *Paramétrage*

Le paramétrage comporte six paramètres : les coordonnées (x, y, z) du point G et les angles d'Euler (ψ, θ, φ).

• *Équations de liaisons*

- Maintien du contact : $\mathbf{OI} \cdot \mathbf{z}_0 = 0$;
- Roulement sans glissement : $\mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) = \mathbf{0}$.

La première équation de liaison est holonome, un paramètre du mouvement pourra être éliminé (dans ce cas z, la cote verticale de G). La seconde fournit deux équations scalaires non-holonomes. Aucun autre paramètre du mouvement ne peut être éliminé.
Nous avons un système à deux équations de liaisons et cinq paramètres du mouvement et donc cinq équations de Lagrange. Nous avons plus d'équations que d'inconnues. Dans un premier temps nous choisissons un mouvement virtuel compatible avec les liaisons.

• Maintien du contact : $\mathbf{OI} \cdot \mathbf{z}_0 = 0 \Rightarrow (\mathbf{OG} + \mathbf{GI}) \cdot \mathbf{z}_0 = 0 \Rightarrow z = R \sin\theta$;

• Roulement sans glissement : $\mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) = \mathbf{V}(\mathrm{G} \in \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) + \mathbf{\Omega}(\mathrm{C}/\mathrm{R_g}) \wedge \mathbf{GI}$.

Or : $$\mathbf{V}(\mathrm{G} \in \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) = \dot{x}\mathbf{x}_0 + \dot{y}\mathbf{y}_0 + \dot{z}\mathbf{z}_0,$$
et le vecteur rotation est $\mathbf{\Omega}(\mathrm{C}/\mathrm{R_g}) = \dot{\psi}\mathbf{z}_0 + \dot{\theta}\mathbf{x}_1 + \dot{\varphi}\mathbf{z}_2$ ou encore :
$$\mathbf{\Omega}(\mathrm{C}/\mathrm{R_g}) = \dot{\psi}\cos\theta\mathbf{z}_2 + \dot{\psi}\sin\theta\mathbf{y}_2 + \dot{\theta}\mathbf{x}_1 + \dot{\varphi}\mathbf{z}_2,$$
soit :
$$\mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) = \dot{x}\mathbf{x}_0 + \dot{y}\mathbf{y}_0 + \dot{z}\mathbf{z}_0 + \left(\dot{\theta}\mathbf{x}_1 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\mathbf{z}_2 + \dot{\psi}\sin\theta\mathbf{y}_2\right) \wedge (-R\mathbf{y}_2).$$
Alors : $\mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) = \dot{x}\mathbf{x}_0 + \dot{y}\mathbf{y}_0 + R\dot{\theta}\cos\theta\mathbf{z}_0 - R\dot{\theta}\mathbf{z}_2 + R(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\mathbf{x}_1$, dont on déduit :
$$\begin{cases} \mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) \cdot \mathbf{x}_1 &= \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + R(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta), \\ \mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) \cdot \mathbf{y}_1 &= -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + R\dot{\theta}\sin\theta. \end{cases}$$
Ceci nous permet d'exprimer les deux équations de liaison non-holonomes :
$$\begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + R(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) &= 0, \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + R\dot{\theta}\sin\theta &= 0. \end{cases}$$

• *Calcul de l'énergie cinétique*

Le tenseur d'inertie du cerceau au point G s'écrit :
$$[J(G, C)] = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}_{(\underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_2)}$$
La vitesse du point G et la vitesse de rotation du cerceau ont déjà été calculées, on en déduit :
$$2\mathrm{T}(\mathrm{C}/\mathrm{R_g}) = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (R\dot{\theta}\cos\theta)^2) + A(\dot{\theta}^2 + (\dot{\psi}\sin\theta)^2) + C(\varphi + \dot{\psi}\cos\theta)^2.$$
On peut alors calculer chacun des P_{q_i} : $\mathrm{T}(\mathrm{C}/\mathrm{R_g}) \Rightarrow P_x, P_y, P_\theta, P_\psi, P_\varphi$. Par exemple :
$$\begin{cases} P_x &= \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{T}(\mathrm{C}/\mathrm{R_g}) = m\ddot{x}, \\ P_y &= m\ddot{y}. \end{cases}$$

• *Calcul des puissances virtuelles*

Étant donné que le champ de vitesse virtuelle choisi est compatible avec la condition de roulement sans glissement, les actions de contact ne travaillent pas dans le mouvement virtuel.

Liaisons Le paramétrage est compatible, donc il n'y a pas de terme au second membre provenant des actions de liaison.

Pesanteur On a : $Q_\theta(\overline{C} \to C) = -mg\cos\theta \Rightarrow Q_x = Q_y = Q_\varphi = Q_\psi = 0$ et $Q_\theta = -mg\cos\theta$.

- *Équations de liaisons « virtualisées »*

$$\begin{cases} \dot{x}^* \cos\psi + \dot{y}^* \sin\psi + R(\dot{\varphi}^* + \dot{\Psi}^* \sin\theta) & = & 0, \\ -\dot{x}^* \sin\psi + \dot{y}^* \cos\psi + R\dot{\theta}^* \sin\theta & = & 0. \end{cases}$$

L'écriture des équations de Lagrange nécessitera l'introduction de deux multiplicateurs λ_1 et λ_2. On a donc un système de sept équations à sept inconnues à résoudre :

Cinq équations de Lagrange

$$\begin{cases} L_x & P_x = Q_x + \lambda_1 \cos\psi - \lambda_2 \sin\psi = \lambda_1 \cos\psi - \lambda_2 \sin\psi, \\ L_y & P_y = Q_y + \lambda_1 \sin\psi + \lambda_2 \cos\psi = \lambda_1 \sin\psi + \lambda_2 \cos\psi, \\ L_\theta & P_\theta = Q_\theta + \lambda_2 R \sin\theta = -mgR\cos\theta + \lambda_2 R \sin\theta, \\ L_\psi & P_\psi = Q_\psi + \lambda_1 R \sin\theta = \lambda_1 R \sin\theta, \\ L_\varphi & P_\varphi = Q_\varphi + \lambda_1 R = \lambda_1 R. \end{cases}$$

Deux équations de Liaison

$$\begin{cases} \dot{x} \cos\psi + \dot{y} \sin\psi + R(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin\theta) & = & 0, \\ -\dot{x} \sin\psi + \dot{y} \cos\psi + R\dot{\theta} \sin\theta & = & 0. \end{cases}$$



On considère le même cerceau C de rayon R et de centre d'inertie G qui roule sans glisser sur un plan P avec lequel il est en contact en un point I.

- *Paramétrage*

Six paramètres, coordonnées (x, y, z) du point G et angles d'Euler ψ, θ, φ.

- *Équations de liaisons*

Maintien du contact $z = R\sin\theta$.

Roulement sans glissement $\mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) = \mathbf{0}$.

$$\begin{cases} \dot{x} \cos\psi + \dot{y} \sin\psi + R(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin\theta) & = & 0, \\ -\dot{x} \sin\psi + \dot{y} \cos\psi + R\dot{\theta} \sin\theta & = & 0. \end{cases}$$

Nous avons toujours un système à 5 paramètres du mouvement, et donc 5 équations de Lagrange et 2 équations de liaisons. Nous avons plus d'équations

que d'inconnues. Cette fois-ci, nous choisissons un mouvement virtuel non-compatible avec les liaisons réelles. Le glissement virtuel de C par rapport au plan de contact au point I est autorisé.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{C}/\mathrm{R_g})^* &= (\dot{x}^* \cos\psi + \dot{y}^* \sin\psi + R(\dot{\varphi}^* + \dot{\psi}^* \sin\theta))\mathbf{x}_1 \\ &+ (-\dot{x}^* \sin\Psi + \dot{y}^* \cos\Psi + R\dot{\theta}^* \sin\theta)\mathbf{y}_1. \end{aligned}$$

On adjoint deux actions de contact au point I :

$$\left\{\ \mathcal{A}(\overline{\mathrm{C}} \to \mathrm{C})\ \right\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_\mathrm{I} = X_F \mathbf{x}_1 + Y_F \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\}_\mathrm{I},$$

Calcul de l'énergie cinétique (ici, pas de changement).

$$\begin{aligned} 2\mathrm{T}(\mathrm{C}/\mathrm{R_g}) &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (R\theta\cos\theta)^2 + A(\dot{\theta}^2 + (\dot{\psi}\sin\theta)^2) + C(\Phi + \dot{\psi}\cos\theta)^2 \\ &\Rightarrow P_x,\ P_y,\ P_\theta,\ P_\psi,\ P_\varphi. \end{aligned}$$

- *Calcul des puissances virtuelles*

Liaisons Paramétrage non-compatible. Cette fois-ci les actions de liaison travaillent dans le mouvement virtuel choisi, puisque celui-ci est incompatible et autorise le glissement au point de contact.

$$\begin{aligned} Q_{q_\mathrm{i}}(\overline{\mathrm{C}} \to \mathrm{C}) &= X_F \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}^*} \left(\dot{x}^* \cos\theta + \dot{y}^* \sin\psi + R(\dot{\varphi}^* + \dot{\psi}^* \sin\theta)\right), \\ &+ Y_F \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}^*} \left(-\dot{x}^* \sin\theta + \dot{y}^* \cos\psi + R\dot{\theta}^* \sin\theta\right). \end{aligned}$$

Pesanteur On a : $Q_\theta(\overline{\mathrm{C}} \to \mathrm{C}) = -mg\cos\theta \Rightarrow Q_x = Q_y = Q_\varphi = Q_\psi = 0$ et $Q_\theta = -mg\cos\theta$
Système d'équations à résoudre 7×7

- *Cinq équations de Lagrange*

$$\begin{cases} L_x & P_x = Q_x + X_F\cos\psi - Y_F\sin\psi = X_F\cos\psi - Y_F\sin\psi, \\ L_y & P_y = Q_y + X_F\sin\psi + Y_F\cos\psi = X_F\sin\psi + Y_F\cos\psi, \\ L_\theta & P_\theta = Q_\theta + Y_F R\sin\theta = mgR\cos\theta + Y_F R\sin\theta, \\ L_\psi & P_\psi = Q_\psi + X_F R\sin\theta = X_F R\sin\theta, \\ L_\varphi & P_\varphi = Q_\varphi + X_F R = X_F R. \end{cases}$$

- *Équations de Liaison*

$$\begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + R(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta) & = & 0, \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + R\dot{\theta}\sin\theta & = & 0. \end{cases}$$

Remarque

On retrouve les mêmes équations qu'avec l'autre méthode, les deux multiplicateurs ayant été remplacés par les deux composantes dans le plan de l'action de contact au point I.

Cette méthode a pour avantage de mettre en évidence les actions de contact qui sont cachées derrière les multiplicateurs de Lagrange dans la première méthode. Elle permet de vérifier la validité du critère de non-glissement au point I (Loi de Coulomb).

Si l'on voulait maintenant calculer la composante normale N de l'action de contact au point I, il suffirait d'oublier l'équation holonome $z = R\sin\theta$ et de travailler avec 6 paramètres du mouvement indépendants au lieu de 5, c'est à dire utiliser un paramétrage incompatible avec les liaisons. Lors de l'écriture des équations de Lagrange, on doit modifier l'expression de l'énergie cinétique, puisque un mouvement supplémentaire a été autorisé. Par ailleurs, comme dans les cas précédents, l'action de liaison recherchée N « travaille » dans le mouvement virtuel non-compatible proposé et apparaît donc au second membre. Enfin, il faut ensuite adjoindre au système d'équations obtenu, une équation de liaison supplémentaire : $z = R\sin\theta$.

Le problème aurait alors 6+3 inconnues, 6 paramètres du mouvement et 3 actions de liaisons et 6 + 3 équations, 6 équations de Lagrange et 3 équations de liaison.



Principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un référentiel R_g appelé référentiel galiléen, tel que pour tout système matériel Σ en mouvement par rapport à R_g on a :

$$\left\{\ \mathcal{D}(\Sigma/R_g)\ \right\} = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma)\ \right\}.$$

Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen

Dans un référentiel non galiléen R en mouvement (connu) par rapport à R_g, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\left\{\ \mathcal{D}(\Sigma/R)\ \right\} = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma)\ \right\} + \left\{\mathcal{D}_e(\Sigma \in R/R_g)\right\} + \left\{\mathcal{D}_c(\Sigma \in R/R_g)\right\},$$

avec l'expression suivante pour le torseur des forces d'inertie d'entraînement :

$$\{\mathcal{A}_e(\Sigma \in R/R_g)\} = -\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Gamma}(G/R_g) \\ \mathbf{AG} \wedge m\boldsymbol{\Gamma}(G/R_g) + \left.\dfrac{d\underline{\underline{J}}(G,\Sigma)\boldsymbol{\Omega}(R/R_g)}{dt}\right|_{R_g} \end{array} \right\}_A .$$

On construit de même le torseur « des forces d'inertie de Coriolis » de Σ dans son mouvement par rapport à R et R_g.

$$\{\mathcal{A}_c(\Sigma \in R/R_g)\} = -\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{\forall M \in \Sigma} 2\boldsymbol{\Omega}(R/R_g) \wedge \mathbf{V}(M/R_g)\, dm \\ \displaystyle\int_{\forall M \in \Sigma} \mathbf{AM} \wedge \left[2\boldsymbol{\Omega}(R/R_g) \wedge \mathbf{V}(M/R)\right] dm \end{array} \right\}_A .$$

Principe des puissances virtuelles (PPV)

Cas général

Pour un système de solides Σ et un champ de vitesses virtuelles $\mathcal{V}^*$dont la restriction sur chacun des solides S_i constituant Σ est le champ des moments d'un torseur, noté $\mathcal{V}_i^*$, quelconque s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \{\ \mathcal{D}(S_i/R_g)\ \}\{\mathcal{V}^*\} = \sum_{i=1}^{n} P^*(\overline{\Sigma} \to S_i,\ R_g) + \sum_{i=1}^{n} P^*(S_i \leftrightarrow S_j) \quad \forall \mathcal{V}^*.$$

PPV avec $\{\mathcal{V}^*\}$ égal au champ des vitesses galiléennes

Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = \underbrace{P(\overline{\Sigma} \to \Sigma,\ R_g)}_{\text{Puissance galiléenne des efforts extérieurs}} + \underbrace{P(S_i \leftrightarrow S_j)}_{\text{Puissance des efforts intérieurs}} .$$

PPV avec $\{\mathcal{V}^*\}$ égal au champ des moments de l'un quelconque des torseurs de Lagrange

Équation de Lagrange

$$P_{q_i}(S/R_g) = Q_{q_i}(\overline{S} \to S/R_g),$$

avec

$$P_{q_i}(S/R_g) = \left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\right) T(S/R_g)$$

$$Q_{q_i}(\overline{S} \to S/R_g) = \{\ \mathcal{A}(\overline{S} \to S)\ \} \cdot \{\mathcal{V}_{q_i}(S/R_g)\} .$$

$$\{\mathcal{V}_{q_i}(S/R_g)\} \to \forall (P,Q) \in S \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathbf{V}(Q/R_g) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathbf{V}(P/R_g) + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\boldsymbol{\Omega}(R/R_g)\right) \wedge \mathbf{PQ}.$$

Fonction de force

Les actions mécaniques (*) d'une partie S_e extérieure à Σ sur une partie S_i intérieure à Σ dérivent d'une fonction de force, s'il existe une fonction numérique U des variables $(q_i(t))$ telle que :

$$\forall i = 1,\ n \quad Q_{q_i}(S_e \rightarrow S_i/R_g) = \frac{\partial U(S_e \rightarrow S_i/R_g)}{\partial q_i}.$$

Quelques fonctions de force bien utiles

Attraction gravitationnelle entre deux solides S_1 et S_2 :

$$U(S_1 \rightarrow S_2) = \mathcal{G}_0 \int_{S_1S_2} \frac{dm(P_1)dm(P_2)}{\mathbf{P_1P_2}}^2;$$

Attraction gravitationnelle à la surface de la Terre, entre la Terre et un solide S en mouvement par rapport à la Terre :

$$U(\text{Terre} \rightarrow S) = U(\text{Pesanteur} \rightarrow S) = m(S)\mathbf{g} \cdot \mathbf{OG}.$$

Ressort de traction-torsion : $U(S_1 \rightarrow S_2) = -\frac{1}{2}K(L - L_0)^2 - \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2$,
où r est un ressort de traction torsion, de raideur k en traction-compression, de raideur C en torsion, et de longueur libre l_0, et où l paramètre la distance entre les points d'attache du ressort sur les deux solides S_1 et S_2 et de torsion libre θ_0 où θ paramètre la torsion du ressort.

Exercices

8.1 Satellite d'observation (exercice repris de [1])

Un satellite d'observation a pour mission de fournir des photos de la surface de la Terre. De nombreux dispositifs de contrôle d'orbite et d'altitude sont présents pour assurer un pointage précis. Nous allons étudier la commande de ces éléments de contrôle (bobines magnétiques, roues d'inertie).

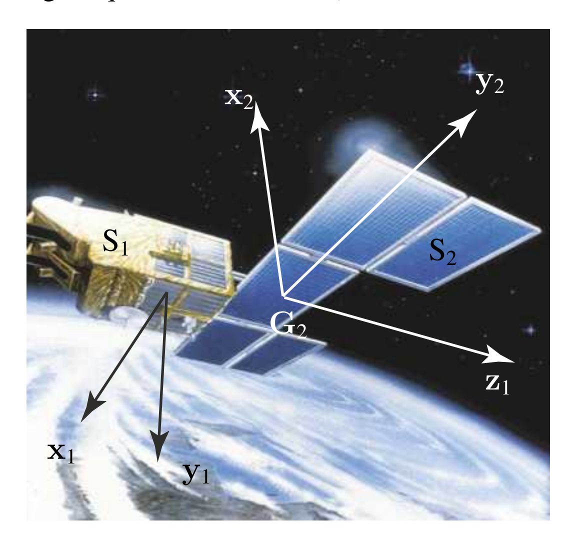


Figure 8.3 Schéma d'un satellite. Extrait de http://www.cieletespacephotos.fr.

Tous les repères sont associés à des bases orthonormées directes.

- R_g est un repère galiléen centré sur le centre O de la Terre : $R_g = (O, \mathbf{x}_g, \mathbf{y}_g, \mathbf{z}_g)$;
- le satellite Σ de centre d'inertie C_1 est sur une orbite circulaire de centre O et de rayon R dans le plan $(O, \mathbf{x}_g, \mathbf{y}_g)$. On pose $\mathbf{OC} = R\mathbf{u}$ et $(\mathbf{x}_g, \mathbf{u}) = (\mathbf{y}_g, \mathbf{v}) = \Omega t$ avec Ω une constante connue.

Le satellite Σ est constitué de cinq solides S_i.

S_1 C'est le corps du satellite. Le repère R_1 est donné par $(C, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ avec :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{z}_g) \xrightarrow{\text{rotation de } \alpha} (\mathbf{u}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \xrightarrow{\text{rotation de } \beta} (\mathbf{n}, \mathbf{y}_1, \mathbf{j}) \xrightarrow{\text{rotation de } \phi} (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1).$$

La masse de S_1 est notée m_1, son centre d'inertie C_1 et $\mathbf{CC}_1 = \ell_1 \mathbf{z}_1$ avec ℓ_1 une constante positive. On a la matrice d'inertie :

$$[J(G, S_1)] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)}.$$

S$_2$ Il s'agit d'un panneau solaire. Le repère R_2 est (C, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}_1$). Le mouvement S_2/S_1 du panneau par rapport au satellite est une rotation autour de C, $\mathbf{z}_1$ avec $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \theta$. La masse de S_2 est notée m_2, son centre d'inertie C_2 et $\mathbf{CC}_2 = \ell_2 \mathbf{z}_1$ avec ℓ_2 une constante positive. On a la matrice d'inertie :

$$[J(\mathrm{G}, \mathrm{S}_2)] = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_1)} .$$

S$_3$ La roue d'inertie est un disque circulaire plein (en fait un cylindre de très faible épaisseur) de masse m et de rayon a. Son centre correspond à C. Le mouvement de cette roue (S_3/S_1) est une rotation autour de G, $\mathbf{x}_1$ avec $\mathbf{x}_1$ l'axe de révolution du disque. On pose $\Omega(S_3/S_1) = \omega_3 \mathbf{x}_1$.

S$_4$ Ce solide est identique au solide S_3. C'est un disque de masse m et de rayon a. Son centre est noté G_4 avec $\mathbf{CC}_4 = \dfrac{-h}{\sqrt{2}} \mathbf{z}_1$ avec h constante positive. Le mouvement de cette roue (S_4/S_1) est une rotation autour de C_4, $\mathbf{y}_1$ avec $\mathbf{y}_1$ l'axe de révolution du disque. On pose $\Omega(S_4/S_1) = \omega_4 \mathbf{x}_1$.

S$_5$ La roue d'inertie S_5 est identique au solide S_3. C'est un disque de masse m et de rayon a. Son centre est noté G_5 avec $\mathbf{CC}_5 = \dfrac{h}{\sqrt{2}} \mathbf{z}_1$. Le mouvement de cette roue (S_5/S_1) est une rotation autour de C_5, $\mathbf{z}_1$ avec $\mathbf{z}_1$ l'axe de révolution du disque. On pose $\Omega(S_5/S_1) = \omega_5 \mathbf{x}_1$.

On a comme données complémentaires que ω_3, ω_4 et ω_5 sont des fonctions de t. On pose $\mathbf{\Omega}(S_1/R_g) = p\mathbf{x}_1 + q\mathbf{y}_1 + r\mathbf{z}_1$. On suppose que :

$$\sum_{i=1}^{5} [J(\mathrm{G}, \mathrm{S_i})] = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)} .$$

- l'attraction gravitationnelle est telle que :

$$\mathbf{M}(\mathrm{G}_\Sigma, \mathrm{Terre} \to \Sigma) = K\, \mathbf{u}_\Sigma \wedge \left(\underline{\underline{J}}(\mathrm{G}_\Sigma, \Sigma) \cdot \mathbf{u}_\Sigma \right),$$

  avec :

$$\mathbf{u}_\Sigma = \frac{\mathbf{OG}_\Sigma}{\|\mathbf{OG}_\Sigma\|},$$

  avec K constante positive

$$K = \frac{3\mathcal{G}_0 \mathrm{M}_{\mathrm{Terre}}}{\|\mathbf{OG}\|^3} ;$$

- les efforts extérieurs à Σ se réduisent aux seules actions de la gravitation terrestre ;
- toutes les liaisons sont parfaites.

Le mouvement de S_2 par rapport à S_1 est imposé par un moteur noté M_{12}, celui de S_3 (resp. S_4 et S_5) par rapport à S_1 est imposé par M_{13} (resp. M_{13} et M_{15}). Les masses de ces moteurs sont négligées.

1) Faire un schéma de ce système (graphe des liaisons et les repères).

2) En supposant connues les fonctions du temps θ, ω_3, ω_4 et ω_5 écrire les équations qui déterminent l'orientation de S_1.

3) Il faut absolument lors d'une prise de vue avoir $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_g$ et $\mathbf{y}_1 = \mathbf{u}$ avec en plus un panneau solaire fixe tel que $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_g$ ce qui peut s'écrire aussi $\forall t,\ \phi(t) = \alpha(t) = 0$ et $\beta(t) = \pi/2$, $\theta(t) = \Omega t$.

   a) À quelle(s) condition(s) cette séquence de prise de vues est-elle possible ?

   b) Quel couple $C_{13}\mathbf{x}_1$ doit alors fournir le moteur M_{13} ?

   c) Quel couple $C_{12}\mathbf{z}_1$ doit alors fournir le moteur M_{12} ?

4) Les prises de vues ne se déroulent pas toujours avec le respect des hypothèses précédentes. Une mobilité supplémentaire du panneau solaire est donc indispensable : S_2 doit pouvoir tourner autour de $G_2, \mathbf{y}_2$.

   a) Comment peut-on réaliser cette liaison entre S_1 et S_2 ?

   b) Quels changements interviennent dans l'étude précédente ?

8.2 Régulateur de Watt

Dans cet exercice, on étudie le système représenté sur la figure 8.4. Il est constitué d'une barre verticale OA, en mouvement de rotation uniforme autour de son axe propre (O, $\mathbf{z}$), de vitesse angulaire constante notée Ω. La barre OA entraîne une seconde barre AC, les deux barres étant reliées en A par une liaison pivot horizontale, supposée parfaite. La barre AC se termine par une sphère pleine S, de centre C qui représente également le centre de gravité de l'ensemble constitué de la barre AC et de S. $\mathbf{AC} = L\mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ désignant le vecteur unitaire de la barre orthonormée R_1 (A, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$), $\mathbf{w}$ étant perpendiculaire au plan contenant AC. La position de l'ensemble AC + S est repérée par l'angle ϕ que forme la barre $\mathbf{u}$ par rapport à la verticale descendante $-\mathbf{z}$. R $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ représente le repère orthonormé de réference, supposé galiléen, et note $\mathbf{g}$ l'accélération de la pesanteur. Le système étudié s'appele régulateur de Watt, et il sert à la régulation de la vitesse de rotation de systèmes variés (moteurs, moulins à vent ...). Le but est d'assurer une vitesse de rotation constante sur l'arbre central, et ce quel que soit le travail demandé au système. Le principe de fonctionnement est le suivant : pour le pendule conique utilisé dans le régulateur de Watt, la position de la sphère est uniquement liée à la vitesse de rotation qui lui est imposée. Aussi, si la vitesse de rotation tend à augmenter, les deux sphères (à l'image des bras des patineurs) tendent à s'écarter, ce qui provoque une augmentation de l'inertie du système. L'inertie augmentant, la vitesse de rotation diminue de façon à revenir à sa valeur initiale, car l'énergie fournie au système étant fixée, l'énergie cinétique reste constante.

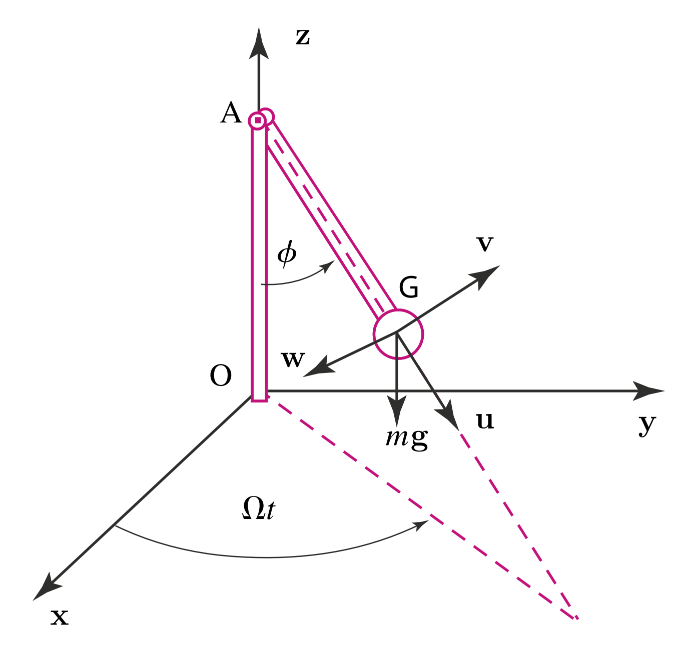


Figure 8.4 **Schéma du régulateur de Watt.**

Analyse cinétique

1) Justifier que la matrice d'inertie de l'ensemble constitué de la barre AC et de la sphère S (noté S_1 par la suite) a pour expression :

$$[J(S_1/R_1)] = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}_{R_1}.$$

dans la base R_1, avec $I \leqslant J$.

2) Calculer le vecteur vitesse instantanée de rotation $\mathbf{\Omega}(S_1/R)$ de S_1. Ce vecteur sera exprimé dans la base R_1 en fonction de Ω, ϕ et $\dot{\phi}$. En déduire que le moment cinétique de S_1 en A par rapport à R a pour expression :

$$\sigma(A \in S_1/R) = -I\Omega\cos\phi\mathbf{u} + J\Omega\sin\phi\mathbf{v} + J\dot{\phi}\mathbf{w}.$$

Analyse dynamique

3) Calculer le moment dynamique en A de S_1 par rapport à R. Le résultat sera exprimé dans la base R_1. La masse de S_1 est notée M.

4) Calculer le moment du poids de S_1 par rapport à A, et exprimer le résultat obtenu dans R_1. Par application du théorème du moment dynamique à S_1, puis projection

sur une direction appropriée, en déduire que l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$J\ddot{\phi} + (I - J)\Omega^2 \sin\phi\cos\phi = -MgL\ \sin\phi.$$

Étude de l'équilibre du système

On s'intéresse à présent aux positions d'équilibre du système S_1, pour lesquelles $\dot{\phi}$ et $\ddot{\phi}$ sont nuls, la vitesse de rotation Ω étant imposée et non nulle.

5) Montrer que les positions $\phi = 0$ et $\phi = \pi$ sont toujours d'équilibre, quelle que soit la valeur de Ω.

6) Montrer que si Ω est assez grand (en valeur absolue), il existe une troisième position d'équilibre correspondant à une valeur de ϕ dont on donnera l'expression.

Solutions des exercices

8.1 Régulateur de Watt

Analyse cinétique

1) L'ensemble constitué de la barre AC et de la sphère S présente une symétrie de révolution autour de l'axe (A,**u**). D'après les résultats du chapitre 3, cela implique que, dans tout repère orthonormé contenant (A,**u**), en particulier dans le repère $R_1 = (A, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$, la matrice d'inertie est diagonale et s'écrit :

$$[J(A, S_1)] = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}_{R_1}$$

avec $I \leqslant J$ car (A,**u**) constitue l'axe de symétrie matérielle pour S_1.

2) D'après la composition des rotations :

$$\boldsymbol{\Omega}(S_1/R) = \boldsymbol{\Omega}(S_1/OA) + \boldsymbol{\Omega}(OA/R),$$
$$\boldsymbol{\Omega}(S_1/OA) = \dot{\phi}\mathbf{w}.$$

correspond à la liaison pivot d'axe (A,**w**) de S_1 par rapport à OA, et

$$\boldsymbol{\Omega}(OA/R) = \Omega\mathbf{z} = \Omega(-\cos\phi\mathbf{u} + \sin\phi\mathbf{v}).$$

Le point A étant fixe, on exprime le moment cinétique en A :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(A \in S_1/R) &= \underline{\underline{J}}(A, S_1) \cdot \boldsymbol{\Omega}(S_1/R) \\ &= -I\,\Omega\cos\phi\mathbf{u} + J\,\Omega\sin\phi\mathbf{v} + J\dot{\phi}\mathbf{w}.\end{aligned}$$

Analyse dynamique

3) Le point A étant fixe, le moment dynamique s'obtient directement par dérivation par rapport au temps de l'expression du moment cinétique :

$$\boldsymbol{\delta}(\mathrm{A} \in \mathrm{S/R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\sigma(\mathrm{A} \in \mathrm{S/R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

Pour le calcul de $\delta(\mathrm{A} \in \mathrm{S/R})$, il convient donc de dériver les vecteurs de la base R_1, on utilise la relation du repère mobile :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}_1/\mathrm{R}) \wedge \mathbf{u} = (\dot{\phi}\mathbf{w} + \Omega\mathbf{z}) \wedge \mathbf{u} = \dot{\phi}\mathbf{v} - \Omega \sin\phi\mathbf{w}.$$

De la même manière :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}_1/\mathrm{R}) \wedge \mathbf{v} = (\dot{\phi}\mathbf{w} + \Omega\mathbf{z}) \wedge \mathbf{v} = -\dot{\phi}\mathbf{u} - \Omega \cos\phi\mathbf{w}.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S}_1/\mathrm{R}) \wedge \mathbf{w} = (\dot{\phi}\mathbf{w} + \Omega\mathbf{z}) \wedge \mathbf{w} = \Omega \cos\phi\mathbf{v} + \Omega \sin\phi\mathbf{u}.$$

Et par dérivation terme à terme de l'expression obtenue pour $\sigma(\mathrm{A} \in \mathrm{S/R})$, tenant compte des relations ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}(\mathrm{A} \in \mathrm{S/R}) = {} & I\Omega\dot{\phi}\sin\phi\mathbf{u} + \Omega\dot{\phi}\cos\phi(-I + 2J)\mathbf{v} \\ & + \left((I - J)\,\Omega^2 \cos\phi \sin\phi + J\ddot{\phi}\right)\mathbf{w}.\end{aligned}$$

4) La résultante du poids de S_1, appliquée en C, vaut $-Mg\,\mathbf{z}$. En conséquence, le moment en A du poids de S_1 s'exprime par le vecteur suivant :

$$\mathbf{M}(\mathrm{A}, \text{poids} \to \mathrm{S}_1) = \mathbf{AC} \wedge (-Mg\,\mathbf{z}) = -MgL \sin\phi\mathbf{w}.$$

Le théorème du moment dynamique pour S_1, appliqué en A par rapport à R, s'écrit :

$$\boldsymbol{\delta}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}_1/\mathrm{R}) = \mathbf{M}(\mathrm{A}, \text{poids} \to \mathrm{S}_1) + \mathbf{M}(\mathrm{A}, \text{pivot} \to \mathrm{S}_1).$$

Par ailleurs, la liaison pivot d'axe horizontal (A,$\mathbf{w}$), est supposée parfaite, celle-ci ne transmet donc pas de moment selon $\mathbf{w}$. En conséquence, l'équation du mouvement est obtenue par la projection du théorème du moment dynamique selon $\mathbf{w}$:

$$\boldsymbol{\delta}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}_1/\mathrm{R}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{M}(\mathrm{A}, \text{poids} \to \mathrm{S}_1) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M}(\mathrm{A}, \text{pivot} \to \mathrm{S}_1) \cdot \mathbf{w},$$

avec $\mathbf{M}(\mathrm{A}, \text{pivot} \to \mathrm{S}_1) \cdot \mathbf{w} = 0$, ce qui conduit à l'équation différentielle du mouvement :

$$(I - J)\,\Omega^2 \cos\phi \sin\phi + J\ddot{\phi} = -MgL\,\sin\phi. \qquad (8.1)$$

Étude de l'équilibre du système

5) En introduisant la relation $\ddot{\phi} = 0$ dans l'équation (8.1), on obtient l'équation d'équilibre suivante :

$$(I - J)\,\Omega^2 \cos\phi \sin\phi = -MgL\ \sin\phi. \tag{8.2}$$

et il apparaît que les positions $\phi = 0$ et $\phi = \pi$ constituent des positions d'équilibre qui vérifient l'équation d'équilibre (8.2). Ces deux positions d'équilibre sont stables.

6) Si Ω est suffisamment grand, en écrivant l'équation d'équilibre sous la forme suivante :

$$(I - J)\cos\phi \sin\phi = -\frac{MgL}{\Omega^2}\ \sin\phi, \tag{8.3}$$

on s'aperçoit que le second membre de l'équation ci-dessus tend vers 0, ce qui implique, puisque $I < J$,

$$\cos\phi \sin\phi = 0.$$

À la relation précédente est associée une nouvelle position d'équilibre possible : $\Omega = \pi/2$. Cette position d'équilibre est associée à la situation où, le bras OA tournant suffisamment vite, les sphères sont en équilibre en position horizontale. Cette dernière position d'équilibre est instable.

8.2 Machine tournante

Analyse cinématique

1)

$$\{\mathcal{V}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_1/S_0) = \dot{\theta}\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{V}(C_1 \in S_1/R_0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{OC}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_0} = \dot{z}\mathbf{z}_0 \end{array} \right\}_{C_1}.$$

2) A est le centre de la liaison pivot entre S_1 et S_2, ce qui implique :

$$\mathbf{V}(A \in S_2/R_0) = \mathbf{V}(A \in S_1/R_0),$$

et en utilisant la relation de torseur entre les vitesses de C_1 et A :

$$\mathbf{V}(A \in S_1/R_0) = \mathbf{V}(C_1 \in S_1/R_0) + \boldsymbol{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \mathbf{C_1A} = \dot{z}\mathbf{z}_0 - R\dot{\theta}\mathbf{x}_1.$$

D'après la composition des rotations :

$$\boldsymbol{\Omega}(S_2/S_0) = \boldsymbol{\Omega}(S_2/S_1) + \boldsymbol{\Omega}(S_1/S_0) = \dot{\alpha}\mathbf{x}_1 + \dot{\theta}\mathbf{z}_0.$$

Pour le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/R_0)\}_A$ on a :

$$\{\mathcal{V}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_2/S_0) = \dot{\alpha}\mathbf{x}_1 + \dot{\theta}\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{V}(A \in S_2/R_0) = \dot{z}\mathbf{z}_0 - R\dot{\theta}\mathbf{x}_1 \end{array} \right\}_A.$$

Analyse cinétique

3) Le solide S_1 présentant une symétrie de révolution autour de $\mathbf{z}_0$, le repère R_0 constitue un repère principal d'inertie, et la matrice d'inertie est diagonale. Du fait de la symétrie de révolution, les axes du plan du disque jouent tous le même rôle. Dans toute base orthornormée contenant le vecteur $\mathbf{z}_0$ (et en particulier dans R_0), la matrice d'inertie a la forme suivante :

$$[J(\mathrm{C},\mathrm{B})] = \begin{pmatrix} I' & 0 & 0 \\ 0 & I' & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}_{R_0} .$$

4) On a la relation :

$$\{\mathcal{C}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \mathbf{V}(C_1 \in S_1/R_0) = m_1 \dot{z}\mathbf{z}_0 \\ \underline{\underline{J}}(\mathrm{O}, S_1) \cdot \mathbf{\Omega}(S_1/R_0) \end{array} \right\}_{\mathrm{O}} ,$$

car O est fixe dans R_0. Par ailleurs, $\underline{\underline{J}}(\mathrm{O}, S_1) \cdot \mathbf{\Omega}(S_1/R_0) = I_{(\mathrm{O},\mathbf{z}_0)}\dot{\theta}\mathbf{z}_0$. Et d'après le théorème de Huyghens, puisque les axes $(\mathrm{O},\mathbf{z}_0)$ et $(C_1,\mathbf{z}_0)$ sont confondus, $I_{(\mathrm{O},\mathbf{z}_0)} = I_{(C_1,\mathbf{z}_0)} = I$, aussi

$$\{\mathcal{C}(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \dot{z}\mathbf{z}_0 \\ I\dot{\theta}\mathbf{z}_0 = I\omega\mathbf{z}_0 \end{array} \right\}_{\mathrm{O}} .$$

5) Pour la résultante cinétique de S_2/R_0, d'après la relation de torseur entre les vitesses de A et C_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(C_2 \in S_2/R_0) &= \mathbf{V}(\mathrm{A} \in S_2/R_0) + \mathbf{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \mathbf{AC}_2 \\ &= -\dot{\theta}(R + l\cos\alpha)\mathbf{x}_1 + \dot{z}\mathbf{z}_0 + l\dot{\alpha}\mathbf{z}_2. \end{aligned}$$

Pour le moment cinétique en A de S_2/R_0, on utilise la relation de torseur avec le point C_2 :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{A} \in S_2/R_0) = \boldsymbol{\sigma}(C_2 \in S_2/R_0) + m\mathbf{V}(C_2 \in S_2/R_0) \wedge \mathbf{C}_2\mathbf{A},$$

C_2 étant le centre de masse de S_2,

$$\boldsymbol{\sigma}(C_2 \in S_2/R_0) = \underline{\underline{J}}(C_2, S_2) \cdot \mathbf{\Omega}(S_2/R_0) = I_2\dot{\alpha}\mathbf{x}_1 + I_2\dot{\theta}\cos\alpha\mathbf{z}_2,$$

dans le repère $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$. On en déduit :

$$\{\mathcal{C}(S_2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} -\dot{\theta}(R + l\cos\alpha)\mathbf{x}_1 + \dot{z}\mathbf{z}_0 + l\dot{\alpha}\mathbf{z}_2 \\ [(I_2 + l)\dot{\alpha} + \dot{z}\cos\alpha]\,\mathbf{x}_1 + (I_2\cos\alpha + m_2 l(R + l\cos\alpha))\dot{\theta}\mathbf{z}_2 \end{array} \right\}_{\mathrm{A}} .$$

Analyse dynamique

6) **Pour le rotor** S_1, les actions extérieures comprennent l'action de la pesanteur, des ressorts r_1 et r_2, de la liaison pivot glissant entre S_0 et S_1 (supposée parfaite), du moteur, et de la liaison pivot en A entre S_2 et S_1. Les torseurs d'actions extérieures correspondant sont donnés par :

$$\{\mathcal{A}(\mathbf{g} \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{C_1},$$

$$\{\mathcal{A}(r_1 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -k(z - z_0)\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{C_1},$$

$$\{\mathcal{A}(S_0 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\mathbf{x}_0 + Y_{01}\mathbf{y}_0 \\ L_{01}\mathbf{x}_0 + M_{01}\mathbf{y}_0 \end{array} \right\}_{O},$$

$$\{\mathcal{A}(\text{moteur} \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ C\mathbf{z}_0 \end{array} \right\}_{O},$$

$$\{\mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{21}\mathbf{x}_1 + Y_{21}\mathbf{y}_1 + Z_{21}\mathbf{z}_0 \\ M_{21}\mathbf{y}_1 + N_{21}\mathbf{z}_0 \end{array} \right\}_{A}.$$

Pour la pale S_2, les actions extérieures comportent la pesanteur, la liaison pivot avec le rotor S_1, l'action du ressort r_2, ainsi que l'action du fluide. Les torseurs d'actions extérieures correspondant sont donnés par :

$$\{\mathcal{A}(\mathbf{g} \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{C_2},$$

$$\{\mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -X_{21}\mathbf{x}_1 - Y_{21}\mathbf{y}_1 - Z_{21}\mathbf{z}_0 \\ -M_{21}\mathbf{y}_1 - N_{21}\mathbf{z}_0 \end{array} \right\}_{A},$$

d'après le principe des actions mutuelles entre S_2 et S_1.

$$\{\mathcal{A}(r_2 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}\alpha\mathbf{x}_1 \end{array} \right\}_{A},$$

$$\{\mathcal{A}(\text{fluide} \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} b\dot{\theta}(R + l\cos\alpha)\mathbf{x}_1 + bl\dot{\alpha}\sin\alpha\mathbf{y}_1 - b(\dot{z} + l\dot{\alpha}\cos\alpha)\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{C_2}.$$

7)

$$\boldsymbol{\delta}(O \in S_1 \cup S_2/R_0) = \boldsymbol{\delta}(O \in S_1/R_0) + \boldsymbol{\delta}(O \in S_2/R_0).$$

O étant fixe dans R_0 :

$$\boldsymbol{\delta}(O \in S_1/R_0) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(O \in S_1/R_0)}{\mathrm{d}t}\right|_{R_0} = \left.\frac{\mathrm{d}I\omega\mathbf{z}_0}{\mathrm{d}t}\right|_{R_0} = \mathbf{0}.$$

Pour $\boldsymbol{\delta}(\mathrm{O} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0)$, on utilise la relation de torseur suivante :

$$\boldsymbol{\delta}(\mathrm{O} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) = \boldsymbol{\delta}(\mathrm{C}_2 \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) + m_2\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{C}_2/\mathrm{R}_0) \wedge \mathbf{C_2O}.$$

On utilise ensuite les résultats de la question 5 pour écrire :

$$m_2\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{C}_2 \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(\mathrm{C}_2 \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_0}.$$

$$\boldsymbol{\delta}(\mathrm{C}_2 \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) = \left.\frac{\mathrm{d}\sigma(\mathrm{C}_2, \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_0}.$$

8) D'après la question 6, l'équation du moment dynamique, appliquée au système S_2 et projetée sur l'axe $(\mathrm{A},\mathbf{x}_1)$, s'écrit :

$$\boldsymbol{\delta}(\mathrm{A} \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) \cdot \mathbf{x}_1 = -(m_1 g\mathbf{z}_0 \wedge \mathbf{C_2A}) \cdot \mathbf{x}_1 + c\alpha + b\dot{\theta}(R + l\cos\alpha).$$

Dans l'équation ci-dessus ne figurent que les paramètres du mouvement (et leurs dérivées par rapport au temps) et des données du problème, on ne voit pas apparaître d'inconnues de liaison, cela est dû au fait que la liaison pivot entre S_1 et S_2 a été supposée parfaite. L'équation ci-dessus constitue donc une équation du mouvement. D'après la question 6, l'équation de la résultante dynamique, appliquée au système $\mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2$ et projetée sur l'axe $(\mathrm{O},\mathbf{z}_0)$, s'écrit :

$$\begin{aligned}\big(m_1\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{C}_1 \in \mathrm{S}_1/\mathrm{R}_0) + m_2\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{C}_2 \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0)\big) \cdot \mathbf{z}_0 = \\ -(m_1 + m_2)g - k(z - z_0) - b(\dot{z} + l\dot{\alpha}\cos\alpha).\end{aligned}$$

Dans l'équation ci-dessus, les inter-efforts de liaison entre S_1 et S_2 n'interviennent pas car on étudie le système $\mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2$, tandis que la liaison pivot glissant entre S_0 et S_1, supposée parfaite, n'apporte aucune contribution selon $\mathbf{z}_0$. Cela explique que l'équation obtenue ne fasse intervenir que les paramètres du mouvement et leurs dérivées, ainsi que des données du problème. On obtient là la seconde équation du mouvement.

9) D'après la question 7, le théorème du moment dynamique appliqué au système $\mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2$ en O, en projection selon z_0, conduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}(\mathrm{O} \in \mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) \cdot \mathbf{z}_0 = {}& -I_2\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin 2\alpha - m_2(R + l\cos\alpha)2l\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha \\ & + C + c\alpha - (m_2 g\mathbf{z}_0 \wedge \mathbf{C_2O}) \cdot \mathbf{z}_0 \\ & - (b\mathbf{V}(\mathrm{C}_2 \in \mathrm{S}_2/\mathrm{R}_0) \wedge \mathbf{C_2O}) \cdot \mathbf{z}_0.\end{aligned}$$

Pour le cas du régime stationnaire, en développant la relation ci-dessus et en posant $\alpha = 0$, $z(t) = 0$, on obtient :

$$C = b\omega(R + l)^2.$$

Lorsque $b = 0$, c'est-à-dire si l'action du fluide est négligeable, on trouve $C = 0$. Ce dernier résultat exprime le fait qu'en l'absence de toute action résistante (les liaisons ayant été supposées parfaites), il est inutile d'excercer un couple moteur.

10) L'énergie cinétique de l'ensemble $S_1 \cup S_2$ par rapport à R_0 est obtenue en calculant le comoment des torseurs cinématique et cinétique. Pour le solide S_1 :

$$
\begin{aligned}
2T(S_1/R_0) &= \{\mathcal{V}(S_1/R_0)\}_O \cdot \{\mathcal{C}(S_1/R_0)\}_O \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_1/R_0) \\ \mathbf{V}(O \in S_1/R_0) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} m_1\mathbf{V}(C_1 \in S_1/R_0) \\ \boldsymbol{\sigma}(O \in S_1/R_0) \end{array} \right\},
\end{aligned}
$$

et d'après les questions 1 et 4 :

$$
2T(S_1/R_0) = \left\{ \begin{array}{c} \omega\mathbf{z}_0 \\ \dot{z}\mathbf{z}_0 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} m_1\dot{z}\mathbf{z}_0 \\ I\omega\mathbf{z}_0 \end{array} \right\}.
$$

Pour le solide S_2 :

$$
\begin{aligned}
2T(S_2/R_0) &= \{\mathcal{V}(S_2/R_0)\}_A \cdot \{\mathcal{C}(S_2/R_0)\}_A \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_0) \\ \mathbf{V}(A \in S_2/R_0) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} m_2\mathbf{V}(C_2 \in S_2/R_0) \\ \boldsymbol{\sigma}(A \in S_2/R_0) \end{array} \right\},
\end{aligned}
$$

et d'après les résultats des questions 2 et 5 :

$$
\begin{aligned}
2T(S_2/R_0) = {} & I_2(\dot{\alpha}^2 + \omega^2\cos^2\alpha) + m_2\omega^2(R + l\cos\alpha)^2 \\
& + m_2(\dot{z}^2 + l^2\dot{\alpha}^2 + 2l\dot{\alpha}\dot{z}\cos\alpha).
\end{aligned}
$$

11) Les diverses puissances qui interviennent dans l'étude du système $S_1 \cup S_2$ se calculent en effectuant le comoment du torseur des efforts et du torseur cinématique, tous deux pris en un même point. On utilise les résultats des questions 1, 2, et 6.
– Puissance des actions du fluide, calculée en C_2 :

$$
\begin{aligned}
P(\text{fluide} \to S_2/R_0) &= \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_0) \\ \mathbf{V}(C_2 \in S_2/R_0) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} -b\mathbf{V}(C_2 \in S_2/R_0) \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \\
&= -b(\mathbf{V}(C_2 \in S_2/R_0))^2.
\end{aligned}
$$

Après calculs, on obtient :

$$
P(\text{fluide} \to S_2/R_0) = -b[\omega^2(R + l\cos\alpha)^2 + l^2\dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2 + 2l\dot{z}\dot{\alpha}\cos\alpha].
$$

– Puissance des inter-efforts de liaison pivot d'axe $(A, \mathbf{x}_1)$ entre S_1 et S_2, calculée en A :

$$
P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_2/S_1) = \dot{\alpha}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{V}(A \in S_2/S_1) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} X_12\mathbf{x}_1 + Y_12\mathbf{y}_1 + Z_12\mathbf{z}_1 \\ M_12\mathbf{y}_1 + N_12\mathbf{z}_0 \end{array} \right\} = 0.
$$

La puissance développée est nulle, ce qui est en accord avec le fait que la liaison entre S_1 et S_2 a été supposée parfaite.

– Puissance de la liaison pivot glissant d'axe (O, $\mathbf{z}_0$) entre S_0 et S_1, calculée en O :

$$P(S_0 \to S_1/R_0) = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_1/R_0) = \omega\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{V}(O \in S_1/R_0) = \dot{z}\mathbf{z}_0 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} X_01\mathbf{x}_0 + Y_01\mathbf{y}_0 \\ L_01\mathbf{x}_0 + M_01\mathbf{y}_0 \end{array} \right\} = 0.$$

La puissance développée est nulle, ce qui est en accord avec le fait que la liaison entre S_0 et S_1 a été supposée parfaite.

– Puissance développée par le moteur, calculée en O :

$$P(S_0 \to S_1/R_0) = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_1/R_0) = \omega\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{V}(O \in S_1/R_0) = \dot{z}\mathbf{z}_0 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ C\mathbf{z}_0 \end{array} \right\}$$
$$= C\omega.$$

– Puissance développée par le ressort r_1, calculée en C_1 :

$$P(r_1 \to S_1/R_0) = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_1/R_0) = \omega\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{V}(C_1 \in S_1/R_0) = \dot{z}\mathbf{z}_0 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} -k(z - z_0)\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}$$
$$= -k(z - z_0)\dot{z}.$$

– Puissance développée par le ressort r_2, calculée en A :

$$P(r_2 \to S_1 \cup S_2/R_0) = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_2/S_1) = \dot{\alpha}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{V}(A \in S_2/S_1) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}\alpha\mathbf{x}_1 \end{array} \right\}$$
$$= c\alpha\dot{\alpha}.$$

– Puissance des actions de la pesanteur, calculée en C_1 (pour S_1) et C_2 (pour S_2) :

$$P(\mathbf{g} \to S_1/R_0) = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_1/R_0) = \omega\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{V}(C_1 \in S_1/R_0) = \dot{z}\mathbf{z}_0 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} -m_1g\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}$$
$$= -m_1g\dot{z}.$$

$$P(\mathbf{g} \to S_2/R_0) = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Omega}(S_2/R_0) \\ \mathbf{V}(C_2 \in S_2/R_0) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} -m_2g\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}$$
$$= -m_2g(\dot{z} + l\dot{\alpha}\cos\alpha).$$

12) D'après les résultats de la question précédente, les actions qui dérivent d'un potentiel sont les actions des ressorts r_1 et r_2 et de la pesanteur :

$$P(r_1 \to S_1/R_0) = -k(z - z_0)\dot{z} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k(z - z_0)^2 + A),$$
$$P(r_2 \to S_1 \cup S_2/R_0) = c\alpha\dot{\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{c\alpha^2}{2} + B),$$
$$P(\mathbf{g} \to S_1/R_0) = -m_1g\dot{z} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1gz + C),$$
$$P(\mathbf{g} \to S_2/R_0) = -m_2g(\dot{z} + l\dot{\alpha}\cos\alpha) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_2g\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{OG_2} + D).$$

A, B, C, et D désignent ici des constantes d'intégration arbitraires.

8.3 Satellite

Nous devons dans un premier temps nous assurer que le point C est bien le centre de masse de l'ensemble ce qui s'écrit :

$$m_1\mathbf{GG}_1 + m_2\mathbf{GG}_2 + m\mathbf{GG} + \underbrace{m\mathbf{GG}_4 + m\mathbf{GG}_5}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0},$$

ce qui impose la relation : $m_1\ell_1 - m_2\ell_2 = 0$. Le schéma des liaisons est donné sur la figure ci-dessous.

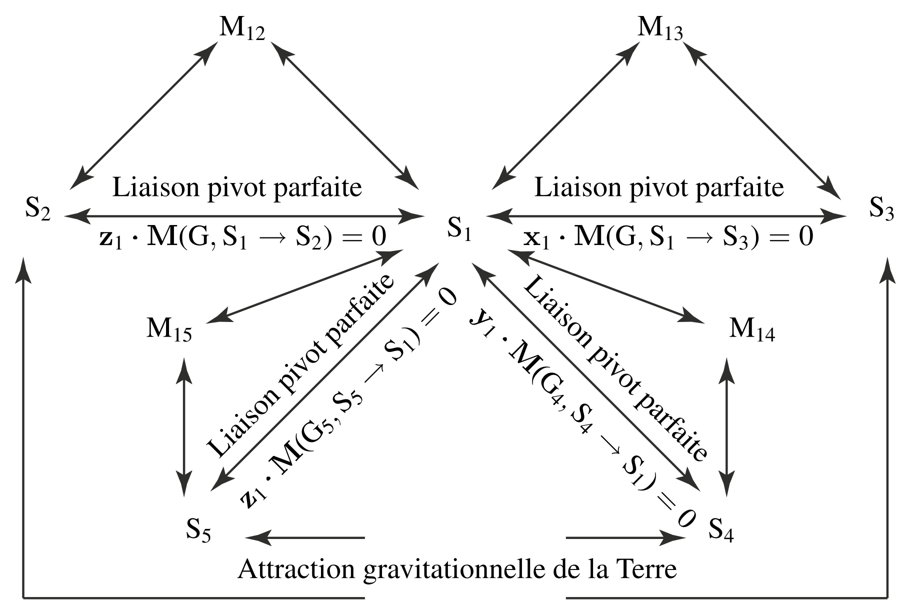


Figure 8.5 Schéma des liaisons

On a les expressions des vecteurs rotations :

$$\mathbf{\Omega}(\mathrm{S}_1/\mathrm{R_g}) = \Omega\mathbf{z}_\mathrm{g} + \dot{\alpha}\mathbf{u} + \dot{\beta}\mathbf{j} + \dot{\phi}\mathbf{y}_1,$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{j} &= \cos\phi\mathbf{z}_1 - \sin\phi\mathbf{x}_1,\\
\mathbf{u} &= \cos\beta\mathbf{n} - \sin\beta\mathbf{y}_1,\\
\mathbf{n} &= \cos\phi\mathbf{x}_1 + \sin\phi\mathbf{z}_1,\\
\mathbf{z}_\mathrm{g} &= \cos\alpha\mathbf{j} + \sin\alpha\mathbf{i},\\
\mathbf{i} &= \cos\beta\mathbf{y}_1 + \sin\beta\mathbf{n}.
\end{aligned}$$

On écrit l'expression du moment dynamique appliqué au système Σ en G. On a :

$$\boldsymbol{\delta}(\mathrm{G},\Sigma/\mathrm{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G},\Sigma/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R_g}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G},\Sigma/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{S}_1} + \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}_1/\mathrm{R_g}) \wedge \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G},\Sigma/\mathrm{R_g}).$$

Elle sera égale par application du PFD à :

$$\mathbf{M}(\mathrm{G}, \text{Terre} \rightarrow \Sigma) = K\mathbf{u} \wedge (\underline{\underline{J}}(\mathrm{G}, \Sigma) \cdot \mathbf{u}).$$

On sait que : $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \Sigma/\mathrm{R_g}) = \sum_{j=1}^{5} \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S}_j/\mathrm{R_g})$ avec pour chaque solide :

S_1 $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S_1}/\mathrm{R_g}) = \underline{\underline{J}}(\mathrm{G}, \mathrm{S_1}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g}) + m_1\mathbf{GG_1} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{G}\, \mathrm{R}_g)$.

S_2 $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S_2}/\mathrm{R_g}) = \underline{\underline{J}}(\mathrm{G}, \mathrm{S_2}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_2}/\mathrm{R_g}) + m_2\mathbf{GG_2} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{G}\, \mathrm{R}_g)$.

S_3 $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S_3}/\mathrm{R_g}) = \underline{\underline{J}}(\mathrm{G}, \mathrm{S_3}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_3}/\mathrm{R_g}) = \underline{\underline{J}}(\mathrm{G}, \mathrm{S_3}) \cdot (\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g}) + \omega_3\mathbf{x_1})$.

S_4 $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S_4}/\mathrm{R_g}) = \underline{\underline{J}}(\mathrm{G}, \mathrm{S_4}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_4}/\mathrm{R_g}) + m\mathbf{GG_4} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{G_4}\, \mathrm{R}_g)$. **Attention** dans cette expression car le point G de calcul n'est pas un point fixe du repère associé à S_4.

S_5 $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S_5}/\mathrm{R_g}) = \underline{\underline{J}}(\mathrm{G}, \mathrm{S_5}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_5}/\mathrm{R_g}) + m\mathbf{GG_5} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{G_5}\, \mathrm{R}_g)$.

On ajoute les deux expressions relatives aux solides S_1 et S_2 et les deux expressions relatives aux solides S_2 et S_5. Cela donne deux expressions :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S_1} \cup \mathrm{S_2}/\mathrm{R_g}) &= \underline{\underline{J}}(\mathrm{G}, \mathrm{S_1}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g}) \\ &+ \underline{\underline{J}}(\mathrm{G}, \mathrm{S_2}) \cdot \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_2}/\mathrm{R_g})}_{\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g}) + \dot{\theta}\mathbf{z_1}} + \underbrace{(m_1\mathbf{GG_1} + m_2\mathbf{GG_2})}_{=\mathbf{0}} \wedge \mathbf{V}(\mathrm{G}\, \mathrm{R}_g).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S_4} \cup \mathrm{S_5}/\mathrm{R_g}) &= \underline{\underline{J}}(\mathrm{G_4}, \mathrm{S_4}) \cdot \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g})}_{\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g}) + \omega_4\mathbf{y_1}} + \underline{\underline{J}}(\mathrm{G_5}, \mathrm{S_5}) \cdot \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_5}/\mathrm{R_g})}_{\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g}) + \omega_5\mathbf{z_1}} + \\ &\underbrace{\frac{mh}{\sqrt{2}} \wedge \underbrace{[\mathbf{V}(\mathrm{G_5}\, \mathrm{R}_g) - \mathbf{V}(\mathrm{G_4}\, \mathrm{R}_g)]}_{\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g}) \wedge \frac{2h}{\sqrt{2}}\mathbf{z_1}}}_{mh^2(p\mathbf{x_1} + q\mathbf{y_1})}.\end{aligned}$$

Tous les calculs se font dans la base associée au repère R_1 $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1})$ et il faut utiliser le transport de l'opérateur d'inertie de G_4 en G ce qui donne :

$$[J(\mathrm{G}, \mathrm{S_2})] = \begin{pmatrix} A_2\cos^2\theta + B_2\sin^2\theta & (A_2 - B_2)\sin\theta\cos\theta & 0 \\ (A_2 - B_2)\sin\theta\cos\theta & A_2\sin^2\theta + B_2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1})}.$$

$$[J(\mathrm{G}, \mathrm{S_3})] = \begin{pmatrix} \dfrac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{ma^2}{4} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1})}.$$

$$
\begin{aligned}
&= [J(\mathrm{G}_4, \mathrm{S}_4)] + [J(\mathrm{G}_4, \mathrm{G}_4, m)] \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{ma^2}{2} + \dfrac{mh^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ma^2}{4} + \dfrac{ma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{ma^2}{4} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1)} .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [J(\mathrm{G}_5, \mathrm{S}_5)] + [J(\mathrm{G}_5, \mathrm{G}_5, m)] \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{ma^2}{4} + \dfrac{mh^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ma^2}{4} + \dfrac{ma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{ma^2}{4} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1)} .
\end{aligned}
$$

Les notations données plus haut permettent d'écrire :

$$
\left\{ \begin{array}{lcl}
A & = & A_1 + A_2 \cos^2\theta + B_2 \sin^2\theta + m(a^2 + h^2), \\
B & = & B_1 + A_2 \sin^2\theta + B_2 \cos^2\theta + m(a^2 + h^2), \\
C & = & C_1 + C_2 + ma^2, \\
D & = & D_1, \\
E & = & 0.
\end{array} \right.
$$

Nous pouvons donc calculer le moment cinétique de chaque solide :

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2/\mathrm{R_g}) \\
&\qquad = \left\{ \begin{array}{l}
\big((A_1 + A_2 \cos^2\theta + B_2 \sin^2\theta)p + (A_2 - B_2)\sin\theta\cos\theta q\big)\,\mathbf{x}_1, \\
\big((A_1 - B_2 \sin\theta\cos\theta p + (B_1 + A_2 \sin^2\theta + B_2 \cos^2\theta)q - D_1 r\big)\,\mathbf{y}_1, \\
\big(-D_1 q + (C_1 + C_2)r + C_2\dot{\theta}\big)\,\mathbf{z}_1.
\end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S}_3/\mathrm{R_g}) = \frac{ma^2}{2}(p + \omega_3)\mathbf{x}_1 + \frac{ma^2}{4}(q\mathbf{y}_1 + r\mathbf{z}_1).
$$

$$
\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \mathrm{S}_4 \cup \mathrm{S}_5/\mathrm{R_g}) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{l}
m\left(\dfrac{a^2}{2} + h^2\right) p\mathbf{x}_1, \\
\left(m\left(\dfrac{3a^2}{4} + h^2\right) q + m\dfrac{a^2}{2}\omega_4\right)\mathbf{y}_1, \\
\left(\dfrac{3ma^2}{4} r + \dfrac{a^2}{2}\omega_5\right)\mathbf{z}_1.
\end{array} \right.
$$

Nous obtenons donc, compte tenu des notations l'expression complète du moment cinétique de l'ensemble :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{G}, \Sigma/\mathrm{R_g}) = (Ap - Fq + \frac{ma^2}{2}\omega_3)\mathbf{x}_1 + (-Fp + Bq - Dr + \frac{ma^2}{2}\omega_4)\mathbf{y}_1 + (-dq + Cr + \frac{ma^2}{2}\omega_5 + C_2\dot{\theta}).$$

L'expression du moment cinétique étant connue au centre de masse, il est facile d'en déduire par dérivation les trois équations scalaires en projection.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ap-Fq+\frac{ma^2}{2}\omega_3)+q(-Dq+Cr+\frac{ma^2}{2}\omega_5+C_2\dot{\theta})-r(-Fp+Bq-Dr+\frac{ma^2}{2}\omega_4)$$
$$= K(-D\sin\beta + C\cos\beta\sin\phi)\sin\beta + (F\cos\beta\cos\phi + B\sin\phi + D\cos\beta\sin\phi)\cos\beta\sin\phi.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-Fp + Bq - Dr + \frac{ma^2}{2}\omega_4) + r(Aq + Cr + \frac{ma^2}{2}\omega_5 + C_2\dot{\theta})$$
$$= K[A\cos\beta\cos\phi + F\sin\beta)\sin\phi - (D\sin\beta + C\cos\beta\sin\phi)\cos\phi]\cos\beta.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-Dp+Cr+\frac{ma^2}{2}\omega_5+C_2\dot{\theta})+p(-Fp+Bq-Dr+\frac{ma^2}{2}\omega_4)-q(Ap-Fq+\frac{ma^2}{2}\omega_3)$$
$$= K[-(F\cos\beta\cos\phi + B\sin\phi + D\cos\beta\sin\phi)\cos\beta\cos\phi + (A\cos\phi\cos\beta + F\sin\beta)\sin\beta].$$

Les conditions exigées pour la prise de vue peuvent se traduire par :

$$\phi = cste = 0 \quad \alpha = cste = 0 \quad \beta = cste = \frac{\pi}{2} \quad \theta = -\Omega t.$$

Il nous faut vérifier que ces conditions qui entraînent : $p = cste = 0, q = cste = 0$ et $r = \Omega$ peuvent être satisfaites par les trois équations scalaires obtenues.

$$\begin{cases} \frac{ma^2}{2}\dot{\omega}_3 - \Omega(-D_1\Omega + \frac{ma^2}{2}\omega_4) &= -KD_1, \\ \frac{ma^2}{2}\dot{\omega}_4 + \Omega\frac{ma^2}{2}\omega_3 &= 0, \\ \frac{ma^2}{2}\dot{\omega}_5 &= K(A_2 - B_2)\sin\Omega t\cos\Omega.t \end{cases}$$

On peut déduire de ces équations différentielles :

$$\begin{cases} \omega_3(t) &= \dfrac{\dot{\omega}_3(t=0)}{\Omega} \sin \Omega t + \omega_3(t=0) \cos \Omega t, \\ \omega_4(t) &= \dfrac{\dot{\omega}_3(t=0)}{\Omega} \cos \Omega t - \omega_3(t=0) \sin \Omega t + \omega_4(t=0) - \dfrac{\dot{\omega}_3(t=0)}{\Omega}, \\ \omega_5(t) &= \dfrac{K}{ma^2\Omega}(A_2 - B_2) \sin^2 \Omega t + \omega_5(t=0). \end{cases}$$

Nous ne devons pas oublier la relation issue de la première équation :

$$\dot{\omega}_3(t=0) - \Omega\omega_4(t=0) + \frac{2}{ma^2}(K + \Omega^2)D_1 = 0.$$

Nous devons donc faire intervenir les roues d'inertie et les moteurs pour la commande. Le moteur M_{13} exerçant un couple suivant l'axe (G, $\mathbf{x}_1$) il faut considérer l'équation de moment du PFD appliqué au solide S_3 et en projection sur $\mathbf{x}_1$. C'est en fait là que l'on retrouve à la fois la difficulté et l'intérêt du PFD. Il faut réfléchir à ce que l'on cherche et n'utiliser que la projection intéressante. On utilise la technique classique décrite ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}(G, S_3/R_{/}g) &= \frac{d\mathbf{x}_1.\boldsymbol{\sigma}(G, S_3/R_g)}{dt} - \boldsymbol{\sigma}(G, S_3/R_g) \cdot \left.\frac{d\mathbf{x}_1}{dt}\right|_{R_g} . \\ &= \mathbf{x}_1 \cdot [K\mathbf{u} \wedge \left(\underline{\underline{J}}(G, S_3) \cdot \mathbf{u}\right)] + C_{13} \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement l'expression du couple :

$$C_{13} = \frac{ma^2}{2}\dot{\omega}_3 = \frac{ma^2}{2}(\dot{\omega}_3(t=0) \cos \Omega t - \Omega\omega_3(t=0) - \sin \Omega t.$$

On procède de la même manière pour trouver l'expression du couple C_{12}. Il est exercé selon l'axe de vecteur $\mathbf{z}_1$. On projette donc l''équation du PFD sur $\mathbf{z}_1$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 \cdot \boldsymbol{\delta}(G, S_2/R_{/}g) &= \mathbf{z}_1 \cdot \left(\left.\frac{d\boldsymbol{\sigma}(G, S_2/R_g)}{dt}\right|_{R_g} + m_2\mathbf{V}(G/R_g) \wedge \mathbf{V}(G_2/R_g) \right) . \\ &= C_{12} + \mathbf{z}_1 \cdot (\mathrm{M}(G_2, \text{Terre} \to S_2) + \mathbf{GG}_2 \wedge \mathbf{R}(\text{Terre} \to S_2) \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\mathbf{z}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}(G, S_2/R_{/}g)}_{=0} - \boldsymbol{\sigma}(G, S_2/R_{/}g) \cdot \underbrace{\left.\frac{d\mathbf{z}_1}{dt}\right|_{R_g}}_{\mathbf{0}} = C_{12} + \mathbf{z}_1 \cdot (K\mathbf{u} \wedge (\underline{\underline{J}}(G_2, S_2)) \cdot \mathbf{u}),$$

avec l'hypothèse $\dfrac{\mathbf{OG}_2}{\|\mathbf{OG}_2\|} \approx \mathbf{u}$. On a

$$[\mathrm{J}(\mathrm{G}, \mathrm{S}_2)] = \begin{pmatrix} A_2 - m_2\ell_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 - m_2\ell_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2,\mathbf{z}_1)},$$

avec

$$\mathbf{u} = -\mathbf{y}_1 = \sin\Omega t\,\mathbf{x}_2 - \cos\Omega t\,\mathbf{y}_2,$$

donc

$$C_{12} = K(B_2 - A_2)\sin\Omega t\cos\Omega t.$$

On peut utiliser un solide intermédiaire I avec une liaison pivot (G, $\mathbf{z}_1$) entre S_1 et I et une liaison pivot (G_2, $\mathbf{y}_2$) entre S_2 et I avec des moteurs $\mathrm{M}_{\mathrm{I}1}$ et $\mathrm{M}_{\mathrm{I}2}$ pour les commander.
On a évidemment une mobilité supplémentaire mais il faut recommancer les calculs qui sont plus compliqués.

Partie V

Équations du mouvement

9 LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes attachés à décrire la cinématique des systèmes de solides indéformables et à exprimer les principes fondamentaux dans le formalisme adapté à cette cinématique. L'écriture de ces principes permet de mettre en place un système d'équations différentielles contenant autant d'équations que d'inconnues. Dans le cas général, on ne sait pas trouver une solution analytique au système d'équations différentielles obtenu en écrivant les équations de Lagrange. Aussi utilise-t-on une méthode approchée. On procède à une linéarisation au premier ordre du système d'équations différentielles obtenu afin de pouvoir le résoudre. Supposons qu'à l'instant t_0 on connaisse les paramètres du mouvement, on note $[q_0]$ le vecteur dont les composantes sont les n paramètres du mouvement à l'instant t_0 et $[q]$ le vecteur dont les composantes sont les n paramètres du mouvement à l'instant t. On note $[\epsilon]$ la variation infinitésimale des paramètres du mouvement correspondant à une variation infinitésimale du temps dt autour du point $(t_0, [q_0])$:

$$[q] = [q_0] + [\epsilon] \quad \text{alors} \quad \left[\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t}\right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{d}^2 \epsilon}{\mathrm{d}t^2}\right].$$

Pour la linéarisation, on suppose $[\epsilon]$ très petit et on suppose également que les dérivées successives par rapport au temps de $[\epsilon]$ restent aussi très petites. Cette dernière hypothèse n'est pas toujours vérifiée. Lors d'un choc en particulier, de très grandes variations de vitesses sont observées pour de très petites variations de position. D'autres techniques de résolution devront alors être employées.

9.1 LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

Nous allons voir ce qu'implique cette opération de linéarisation, lorsque les paramètres du mouvement d'un système de solides sont n paramètres du mouvement indépendants et que les équations du mouvement sont données par les équations de Lagrange

$$P_{q_\mathrm{i}}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g}) = Q_{q_\mathrm{i}}(\overline{\mathrm{S}} \rightarrow \mathrm{S}/\mathrm{R_g}),$$

avec

$$P_{q_\mathrm{i}}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}}\right] - \frac{\partial}{\partial q_\mathrm{i}}\right)\mathrm{T}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g}),$$

$$Q_{q_\mathrm{i}}(\overline{\mathrm{S}} \rightarrow \mathrm{S}/\mathrm{R_g}) = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\mathrm{S}} \rightarrow \mathrm{S})\ \right\} \cdot \left\{\mathcal{V}_{q_\mathrm{i}}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})\right\}.$$

- *Premier membre des équations de Lagrange*

On rappelle que l'énergie cinétique d'un solide S se développe comme suit, en fonction des dérivées partielle vis-à-vis des paramètres du mouvement :

$$T(S/R_g) = \frac{1}{2}\int_S \mathbf{V}^2(P/R_g)\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int_S \left(\sum_1^n \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}m.$$

Si l'on développe et que l'on simplifie en considérant que les produits deux à deux des vitesses de variations des paramètres du mouvement sont nulles, puisqu'on linéarise, on obtient alors :

$$P_{q_i}(S/R_g) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathrm{d}^2 q_j}{\mathrm{d}t^2}\int_S \left[\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_j}\right]\mathrm{d}m + 2\sum_{j=1}^n \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}\int_S \left[\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{OP}}{\partial t\partial q_i}\right]\mathrm{d}m$$
$$+ \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{OP}}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}m.$$

Si le système ne contient aucun actionneur, alors la position du point P ne dépend pas explicitement du temps. Le premier membre des équations de Lagrange s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial t} = \mathbf{0} \Rightarrow P_{q_i}(S/R_g) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathrm{d}^2 q_j}{\mathrm{d}t^2}\int_S \left[\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_j}\right]\mathrm{d}m$$
$$\sum_{j=1}^n M_{ij}\frac{\mathrm{d}^2 q_j}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{j=1}^n M_{ij}\frac{\mathrm{d}^2 \epsilon_j}{\mathrm{d}t^2},$$

compte tenu de la commutativité du produit scalaire : $M_{ij} = M_{ji}$. Par ailleurs, M_{ii} est nécessairement positif. Le premier membre du système formé par les n équations de Lagrange linéarisées peut donc se noter dans ce cas particulier :

$$P_{q_i}(S/R_g) = [M]\left[\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{\epsilon}}{\mathrm{d}t^2}\right],$$

où $[M]$ est une matrice carrée symétrique définie positive de dimension n×n, n étant la mobilité du système et $[\boldsymbol{\epsilon}]$ un vecteur de dimension n contenant les n variations des paramètres du mouvement autour d'une position $[q_0]$. Dans le cas général, le premier membre du système formé par les équations de Lagrange linéarisées, se note de la façon suivante :

$$P_{q_i}(S/R_g) = [M]\left[\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{\epsilon}}{\mathrm{d}t^2}\right] + [C]\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}}{\mathrm{d}t}\right] - [F],$$

où $[M]$ et $[C]$ sont des matrices carrées de dimension n×n, n étant la mobilité du système et où $[\epsilon]$ un vecteur de dimension n, contenant les n variations des paramètres du mouvement autour d'une position $[q_0]$ et $[F]$ un vecteur de dimension n. La matrice $[M]$ est symétrique, définie positive, et peut donc être inversée. Par ailleurs, les matrices $[M]$ et $[C]$ et le vecteur $[F]$ se calculent à partir de la position des points P à l'instant t_0.

- *Second membre des équations de Lagrange : fonction de force*

Lorsque les actions mécaniques extérieures à S appliquées sur S dérivent d'une fonction de force, il existe une fonction U des variables q_i telle que :

$$Q_{q_i}(\overline{S} \to S/R_g) = \frac{\partial U(\overline{S} \to S/R_g)}{\partial q_i}$$

La linéarisation par rapport aux n variations infinitésimales autour de la position de départ $[q_0]$ s'écrit donc :

$$Q_{q_i}(\overline{S} \to S/R_g) = \left. \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(\overline{S} \to S/R_g)}{\partial q_i \partial q_j} \epsilon_j + \frac{\partial U(\overline{S} \to S/R_g)}{\partial q_i} \right|_{[q]=[q_0]}$$

La partie du second membre du système d'équations du mouvement issue d'une action mécanique dérivant d'une fonction de force U, se note donc :

$$[K]\,[\epsilon] - [F]\,,$$

où $[K]$ est une matrice carrée symétrique de dimension n×n, n la mobilité du système, $[F]$ un vecteur de dimension n et $[\epsilon]$ un vecteur de dimension n, contenant les n variations des paramètres du mouvement autour de la position de départ $[q_0]$.

- *Second membre des équations de Lagrange : loi visqueuse*

Lorsque les actions mécaniques appliquées sur S sont décrites par une loi de comportement de type visqueux, le second membre des équations de Lagrange se calcule alors comme suit :

$$Q_{q_i}(\overline{S} \to S/R_g) = \left\{ \ \mathcal{A}(\overline{S} \to S) \ \right\} \cdot \{\mathcal{V}_{q_i}(S/R_g)\}\,,$$

soit aussi :

$$Q_{q_i}(\overline{S} \to S/R_g) = \mathbf{R}(\overline{S} \to S) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(P/R_g)}{\partial \dot{q}_i} + \mathbf{M}(P, \overline{S} \to S) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}(S/R_g)}{\partial \dot{q}_i}.$$

Si l'on admet que les efforts et moment découlent d'une loi visqueuse telle que, au point P :

$$\mathbf{R}(\overline{S} \to S) = -C_v \mathbf{V}(P/R_g),$$

et

$$\mathbf{M}(\mathrm{P}, \overline{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}) = -\eta \cdot \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g}),$$

et comme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\overline{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(\mathrm{P}/\,\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}} &= -C_v \left[\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_\mathrm{k}} \frac{\mathrm{d}q_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_\mathrm{i}} \\
&= -C_v \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} \left(\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_\mathrm{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}q_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} \right) - C_v \left(\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_\mathrm{i}} \right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{k}} \frac{\mathrm{d}q_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} + \left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\mathrm{d}t} \right|_{\mathrm{R_g}}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\mathrm{P}, \overline{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}) \cdot \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}} &= -\eta \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{k}} \frac{\mathrm{d}q_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial t} \cdot \right) \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}}, \\
&= -\eta \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}q_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} \right) \\
&\quad -\eta \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
Q_{q_\mathrm{i}}(\overline{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}/\mathrm{R_g}) = \sum_{k=1}^{n} &\left[-C_v \left(\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_\mathrm{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_\mathrm{i}} \right) - \eta \left(\frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}} \right) \right] \frac{\mathrm{d}q_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} \\
&- C_v \left(\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial q_\mathrm{i}} \right) - \eta \left(\frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}} \right).
\end{aligned}$$

La partie du second membre, issue d'effets visqueux, du système formé par les équations de Lagrange linéarisées peut donc se noter

$$-[C] \left[\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} \right] + [F],$$

où $[C]$ est une matrice carrée symétrique de dimension $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ et $[F]$ un vecteur de dimension n ; n est la mobilité du système et $[\epsilon]$ un vecteur de dimension n, contenant les n variations des paramètres du mouvement autour d'une position $[q_0]$. On peut noter que F est nul si le système ne contient pas d'actionneur.

- *Système d'équations du mouvement après linéarisation*

Dans le cas général, le système formé par les n équations de Lagrange s'écrit donc après linéarisation :

$$[M([q_0(t)])]\left[\frac{\mathrm{d}^2\epsilon}{\mathrm{d}t^2}\right]+[C([q_0(t)])]\left[\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t}\right]+[K([q_0(t)])]\,[\epsilon]=[F([q_0(t)])]\,,$$

où $[\epsilon]$ est un vecteur de dimension égale à la mobilité du système n, dont les composantes sont les n variations infinitésimales autour d'une position $[q_0(t)]$ repérées par n paramètres du mouvement q_{i} supposés connus à l'instant t et au voisinage de laquelle les équations du mouvement ont été linéarisées. $[M]$ est appelée la matrice de masse, $[C]$ la matrice d'amortissement et $[K]$ la matrice de raideur. La matrice de masse est toujours symétrique, définie positive de par sa définition. $[K]$ est toujours symétrique de par sa définition.

e) Exemple : l'étouffeur de vibrations

Afin d'illustrer cette procédure de linéarisation, on revient au problème de l'étouffeur de vibrations déjà exposé au chapitre précédent. Le système est constitué d'un moteur rotatif, dont la partie fixe est montée sur un support machine S_1, de masse M_1 et de centre d'inertie G_1, lui-même attaché au bâti S_0 par une liaison glissière élastique (paramètre du mouvement X). Par ailleurs, la partie tournante du moteur présente un balourd S_3, de masse M_3, dont le centre d'inertie G_3 est situé à une distance R de G_1, et dont la position est repérée par l'angle φ. Si le moteur tourne à vitesse constante, le mouvement de S_2/S_1 est connu :

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega=cste.$$

On ajoute au système un étouffeur de vibration S_2, de masse M_2, dont le centre d'inertie G_2 est situé à une distance l de G_1 et dont la position par rapport à S_1 est repérée par l'angle θ. On va utiliser la méthode de Lagrange pour écrire les équations du mouvement. Le principe des puissances virtuelles s'écrit en utilisant les torseurs de Lagrange, où Σ désigne ($S_0\cup S_1\cup S_2\cup S_3$) :

$$P_{q_{\mathrm{i}}}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})=Q_{q_{\mathrm{i}}}(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma/\mathrm{R_g})+Q_q(\Sigma\rightarrow\Sigma),$$

avec

$$P_{q_{\mathrm{i}}}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_{\mathrm{i}}}\right]-\frac{\partial}{\partial q_{\mathrm{i}}}\right)\mathrm{T},$$

et

$$Q_{q_{\mathrm{i}}}(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma/\mathrm{R_g})=\left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma)\ \right\}\cdot\{\mathcal{V}_{q_{\mathrm{i}}}(\Sigma/\mathrm{R_g})\}\,.$$

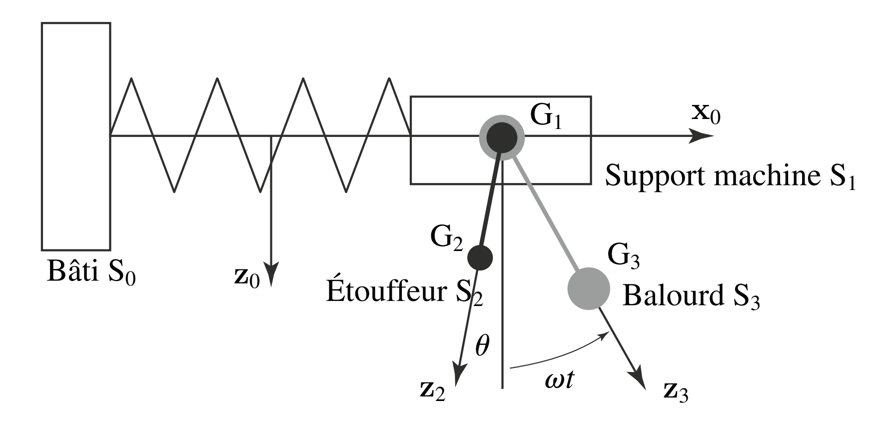


Figure 9.1 Étouffeur de vibrations.

- *Calcul des Q_{q_i}*

Les liaisons pivots entre S_3 et S_1 et entre S_2 et S_1 ainsi que la liaison glissière entre S_1 et S_0 sont supposées parfaites, elles ne développent donc pas de puissances virtuelles. Seuls le poids et l'action du ressort développent de la puissance. Dans les deux cas, on dispose d'une fonction de force :

Ressort $U(S_0 \overset{r}{\leftrightarrow} S_1) = \dfrac{1}{2}K(X - X_0)^2$

soit : $Q_X(S_0 \overset{r}{\leftrightarrow} S_1) = 0$ et $Q_\theta(S_0 \overset{r}{\leftrightarrow} S_1) = 0.$

Pesanteur L'axe (O, G_1) reste confondu avec x, donc :

$$Q_X(\text{pes} \to S_1)/R_g) = 0 \quad Q_\theta(\text{pes} \to S_1/R_g) = 0.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} Q_X(\text{pes} \to S_2)/R_g) &= 0 \\ Q_\theta(\text{pes} \to S_2/R_g) &= M_2\mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{OG_2}}{\partial \theta} = -M_2 l g \sin\theta. \end{aligned}$$

- *Calcul des P_{q_i}*

L'énergie cinétique du système se calcule comme suit :

$$T(\Sigma/R_g) = T(S_1/R_g) + T(S_2/R_g) + T(S_3/R_g),$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\mathrm{S}_1/\mathrm{R_g}) &= \frac{1}{2}M_1\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}^2,\\
\mathrm{T}(\mathrm{S}_2/\mathrm{R_g}) &= \frac{1}{2}M_2\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}^2+\left(l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+2\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}l\cos\theta\right),\\
\mathrm{T}(\mathrm{S}_3/\mathrm{R_g}) &= \frac{1}{2}M_3\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}^2+(R\omega)^2+2\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\omega R\cos\omega t\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, comme : $P_{q_\mathrm{i}} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}}\right]-\frac{\partial}{\partial q_\mathrm{i}}\right)\mathrm{T}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})$:

$$\begin{aligned}
P_\theta(\Sigma/\mathrm{R_g}) &= M_2 l\left(l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}\cos\theta\right),\\
P_X(\Sigma/\mathrm{R_g}) &= M_1\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}+M_2 l\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\cos\theta-2\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}^2\sin\theta\right)-M_2R\omega^2\sin\omega t.
\end{aligned}$$

- *Équations de Lagrange*

On obtient donc deux équations de Lagrange :

$$\begin{aligned}
&M_1\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}+M_2 l\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\cos\theta-2\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}^2\sin\theta\right)-M_3R\omega^2\sin\omega t=-\frac{1}{2}K(X-X_0),\\
&M_2 l\left(l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}\cos\theta\right)=-M_2 lg\sin\theta.
\end{aligned}$$

- *Équations linéarisées*

Pour pouvoir résoudre ce système, on se place en un point X_i, θ_i et on fait un développement limité au premier ordre autour de ce point des équations du mouvement obtenues. On rappelle que les développements limités de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ autour d'un point θ_i s'écrivent :

$$\cos(\theta_\mathrm{i}+\epsilon)=\cos\theta_\mathrm{i}-\epsilon\sin\theta_\mathrm{i}+O(\epsilon^2)\qquad \sin(\theta_\mathrm{i}+\epsilon)=\sin\theta_\mathrm{i}+\epsilon\cos\theta_\mathrm{i}+O(\epsilon^2).$$

Pour linéariser, on suppose que les paramètres X et θ sont peu différents de la position de référence X_i, θ_i et par ailleurs, on fait également l'hypothèse que les dérivées temporelles des paramètres du mouvement sont petites devant celles au point de référence. Après linéarisation, les deux équations du mouvement s'écrivent, en posant, $X = X_i + \chi$ et $\theta = \theta_\mathrm{i} + \epsilon$:

$$\begin{aligned}
&M_1\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}t^2}+M_2 l\cos\theta_\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^2\epsilon}{\mathrm{d}t^2}+K\chi=-K(X_\mathrm{i}-X_0)+M_3R\omega^2\sin\omega t,\\
&M_2 l\cos\theta\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}t^2}+M_2l^2\frac{\mathrm{d}^2\epsilon}{\mathrm{d}t^2}+M_2lg\epsilon\cos\theta_\mathrm{i}=-M_2gl\sin\theta.
\end{aligned}$$

Le système obtenu peut alors se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[M]\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}\right]+[K]\left[\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right]=[F(t)],$$

avec

$$[w]=\begin{pmatrix}\chi\\ \epsilon\end{pmatrix}\quad [M]=\begin{pmatrix}M_1 & M_2 l\cos\theta_{\mathrm{i}}\\ M_2 l\cos\theta_{\mathrm{i}} & M_2 l^2\end{pmatrix},$$

$$[K]=\begin{pmatrix}K & 0\\ 0 & M_2 l^2\end{pmatrix}\quad [F(t)]=\begin{pmatrix}-K(X_{\mathrm{i}}-X_0)+M_3 R\omega^2\sin\omega t\\ -M_2 g l\sin\theta_{\mathrm{i}}\end{pmatrix}.$$

9.1.1 Équilibre et Stabilité

a) Introduction

L'objectif de cette partie est de présenter diverses méthodes permettant de définir et d'étudier la stabilité d'une position d'équilibre. Deux méthodes peuvent êetre envisagées. La méthode directe, qui s'appuie sur le théorème de Lejeune-Dirichlet, permet de définir les positions d'équilibre indépendamment des équations du mouvement. Cette méthode est bien adaptée aux systèmes dont les forces dérivent d'un potentiel indépendant du temps. La méthode générale, consiste à écrire les équations du mouvement linéarisées au voisinage des positions d'équilibre ce qui permet de discuter de leur stabilité.

b) Systèmes conservatifs

Si les puissances des efforts intérieurs et extérieurs sont nulles ou bien se calculent par dérivation d'une énergie potentielle qui ne dépend pas du temps, dont on notera la somme $\mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})$, alors l'intégrale première de l'énergie cinétique traduit directement la conservation de l'énergie du système :

$$\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})+\mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})=\text{cste}.$$

Le système est alors dit « conservatif ». L'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique et réciproquement au cours du mouvement. Les équations de Lagrange pour un système conservatif, donnent :

$$P_{q_{\mathrm{i}}}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})=Q_{q_{\mathrm{i}}}(\overline{\mathrm{S}}\rightarrow\mathrm{S})\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathrm{T}(\mathrm{S}/\mathrm{R_g})}{\partial\dot{q}_t}\right]-\frac{\partial(\mathrm{T}+\mathrm{U})}{\partial q_{\mathrm{i}}}=0.$$

Et comme, pour un système conservatif, la fonction de force U ne dépend que des paramètres de position q_{i} :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_{\mathrm{i}}}\right]-\frac{\partial}{\partial q_{\mathrm{i}}}\right)(\mathrm{T}+\mathrm{U})=0.$$

On définit alors la fonction $\mathcal{L}$, dite Lagrangien du système, telle que : $\mathcal{L} = \mathrm{T} + \mathrm{U}$. Alors les équations de Lagrange, pour un système conservatif s'écrivent aussi :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}}\right] - \frac{\partial}{\partial q_\mathrm{i}}\right)\mathrm{L} = 0.$$

- *Équilibre*

Les positions d'équilibre sont telles que les paramètres du mouvement restent constants. Dans cette configuration, l'énergie cinétique est nulle et les dérivées par rapport au temps sont nulles. On déduit alors des équations de Lagrange, pour toute position d'équilibre :

$$\forall \mathrm{i} \in (1,\, \mathrm{n}) \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}}\right] - \frac{\partial}{\partial q_\mathrm{i}}\right)\mathcal{L} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mathrm{i}}\right|_{q=q_\mathrm{e}} = 0.$$

Comme à l'équilibre l'énergie cinétique est nulle, ceci équivaut à écrire :

$$\forall \mathrm{i} \in (1,\, \mathrm{n}) \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}}\right] - \frac{\partial}{\partial q_\mathrm{i}}\right)\mathcal{L} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_\mathrm{i}}\right|_{q=q_\mathrm{e}} = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{\partial \mathrm{E_p}}{\partial q_\mathrm{i}}\right|_{q=q_\mathrm{e}} = 0.$$

Les positions d'équilibre sont donc obtenues pour les extremums (maximums, minimums ou points d'inflexion locaux) de la fonction de force U ou de l'énergie potentielle $\mathrm{E_p}$.

- *Stabilité : définition*

Une position d'équilibre d'un système matériel est dite stable si le mouvement induit par une perturbation (conditions initiales en vitesse et en position très petites) reste au voisinage de cette position.

- *Stabilité : théorème de Lejeune Dirichlet*

D'après l'intégrale première du théorème de l'énergie cinétique, pour un système conservatif Σ, nous pouvons écrire :

$$\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} + \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} = \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t + \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t = \mathrm{cste}.$$

Supposons que l'énergie potentielle présente un minimum local strict dans la position d'équilibre étudiée. Comme l'énergie potentielle est définie à une constante près, on peut choisir une expression de cette énergie potentielle telle que le minimum local de l'énergie potentielle soit nul dans la position d'équilibre étudiée. Si l'on choisit une petite perturbation, telle que à t_0 et avec α étant très petit :

$$\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} \leqslant \alpha \quad \text{soit} \quad \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} + \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} \leqslant 2\alpha.$$

Comme à tout instant : $0 \leqslant \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t$ et $0 \leqslant \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t$, on en déduit que par la suite, à tout instant : $0 \leqslant \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t \leqslant 2\alpha$ et $0 \leqslant \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t \leqslant 2\alpha$.

1. Comme l'énergie potentielle ne dépend que de la position, $0 \leqslant E_p(\Sigma/R_g)_t \leqslant 2\alpha$, signifie que tous les $q_i - q_{ie}$ restent très petits.
2. Comme dans un système conservatif, l'énergie cinétique est une forme quadratique des vitesses de variation des paramètres du mouvement, (les liaisons sont indépendantes du temps), alors : $0 \leqslant T(\Sigma/R_g)_t \leqslant 2\alpha$ signifie que les $\dfrac{dq_i}{dt}$ restent également très petits.
3. La position d'équilibre est donc stable.

Théorème 9.1 ***Théorème de Lejeune Dirichlet***

Étant donné un système conservatif, tout maximum local strict de la fonction de force (tout minimum local strict de l'énergie potentielle), définit une position d'équilibre stable.

Pour un système conservatif, la recherche des positions d'équilibre et l'étude de leur stabilité peut donc se faire directement à l'aide de l'énergie potentielle du système, sans qu'il soit besoin d'écrire complètement les équations du mouvement.

- *Extension aux systèmes visqueux*

On considère le cas particulier ou le système développe une résistance passive opposée à la vitesse (force visqueuse, traînée aérodynamique). Les équations de Lagrange pour un tel système, donnent toujours :

$$P_{q_i}(S/R_g) = Q_{q_i}(\overline{S} \rightarrow S),$$

avec

$$P_{q_i} = \left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\right)T,$$

$$Q_{q_i}(\overline{S} \rightarrow S/R_g) = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \mathbf{R}(\overline{S} \rightarrow S) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathbf{V}(P/R_g).$$

En tenant compte de la nature visqueuse de la résistance passive :

$$Q_{q_i}(\overline{S} \rightarrow S/R_g) = \frac{\partial U}{\partial q_i} - C_v \mathbf{V}(P/R_g) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(P/R_g)}{\partial \dot{q}_i}.$$

Les équations de Lagrange, pour un système visqueux s'écrivent alors :

$$\left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\right)\mathcal{L} = C_v \mathbf{V}(P/R_g) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(P/R_g)}{\partial \dot{q}_i}.$$

Dans toute position d'équilibre, la vitesse est nulle et le second membre de cette équation est donc nul également, ce qui nous ramène au cas précédent pour la détermination des positions d'équilibre.
Pour un système visqueux, les positions d'équilibre correspondent encore aux extremums de la fonction de force du système.
Pour l'étude de la stabilité, on peut encore appliquer le théorème de Lejeune-Dirichlet. En effet, d'après le principe de conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{P}_{\mathrm{visq}}.$$

Entre deux instants t et t_0 on peut toujours écrire :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t} = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}t} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{P}_{\mathrm{visq}} \quad \text{soit} \quad \mathrm{T}_t - \mathrm{T}_{t_0} = \mathrm{U}_t - \mathrm{U}_{t_0} + \mathrm{W}_{\mathrm{visq}},$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} + \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} + \mathrm{W}_{\mathrm{visq}} = \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t + \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t,$$

avec dans tous les cas $\mathrm{W}_{\mathrm{visq}} < 0$.
Si, comme précédemment, on choisit une petite perturbation α, telle que à t_0 :

$$\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} \leqslant \alpha \quad \text{soit} \quad \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} + \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_{t_0} \leqslant 2\alpha,$$

avec à tout instant : $0 \leqslant \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t$ et $0 \leqslant \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t$, on en déduit que par la suite, à tout instant :

$$0 \leqslant \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t \leqslant 2\alpha + \mathrm{W}_{\mathrm{visq}} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \mathrm{E_p}(\Sigma/\mathrm{R_g})_t \leqslant 2\alpha + \mathrm{W}_{\mathrm{visq}}.$$

$\mathrm{W}_{\mathrm{visq}}$ étant négative, la position d'équilibre est encore stable.

- *Équilibre et stabilité pour un système à un seul paramètre*

La position d'équilibre est un aussi un minimum local si :

$$\left.\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q}\right|_{q=q_\mathrm{e}} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial q^2}\right|_{q=q_\mathrm{e}} < 0.$$

- *Équilibre et stabilité pour un système à n paramètres*

La position $[q_e]$ est une position d'équilibre si :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{[q]=[q_e]} = 0 \quad \forall i.$$

Cette position d'équilibre est stable si la matrice formée par les termes :

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{[q]=[q_e]} = a_{ij},$$

est à valeurs propres toutes négatives.

Il est généralement plus simple de procéder à un développement limité à l'ordre deux de la fonction de force U au voisinage de la position d'équilibre. Soit :

$$U = U_{[q]=[q_e]} + \sum (q_i - q_{ei}) \left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{[q]=[q_e]} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (q_j - q_{ej})(q_i - q_{ei}) \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{[q]=[q_e]}.$$

Or la condition d'équilibre impose :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{[q]=[q_e]} = 0 \quad \forall i.$$

Donc le développement limité s'écrit :

$$U = U_{[q]=[q_e]} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (q_j - q_{ej})(q_i - q_{ei}) \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{[q]=[q_e]}.$$

Pour que la position d'équilibre soit stable, il suffira alors que dans tous les cas :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (q_j - q_{ej})(q_i - q_{ei}) \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{[q]=[q_e]} < 0.$$

Exemple : étouffeur de vibration

Si l'on revient au cas de l'étouffeur de vibration déjà vu plus haut. Dans le cas où, la vitesse de rotation ω du balourd est nulle, on peut chercher des positions d'équilibre à l'aide du théorème de Lejeune Dirichlet étant donné que toutes les forces dérivent d'un potentiel. On peut alors écrire pour le système complet :

$$\begin{aligned} Q_X(\Sigma \to \Sigma) &= -K(X - X_0) = \frac{\partial U_{ressort}}{\partial X}, \\ Q_\theta(\Sigma \to \Sigma) &= -M_2 g \sin\theta = \frac{\partial U_{pesanteur}}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Les positions d'équilibre sont telles que $Q_{q_i} = 0$ soit $X = X_0$ et $\sin\theta = 0$. Il existe donc deux positions d'équilibre, l'une pour laquelle la masse M_2 est en haut ($\theta = \pi$) et l'autre pour laquelle elle est en bas ($\theta = 0$). Alors :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial X^2} = -K, \\ a_{22} &= \frac{\partial^2 \mathrm{U}^2}{\partial \theta} = -M_2 gl\cos\theta, \\ a_{12} = a_{21} &= \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial\theta\partial X} = 0. \end{aligned}$$

En appliquant le critère précédent, la position d'équilibre est donc stable la matrice est à valeurs propres négatives. Ce qui impose que : $a_{11} = \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial X^2} = -K < 0$ ce qui est toujours vrai. D'autre part $a_{22} = \frac{\partial^2 \mathrm{U}^2}{\partial \theta} = -M_2 gl\cos\theta < 0$ ce qui implique que $\cos\theta$ soit positif. Comme on l'attendait, seule la position $\theta = 0$ est stable, c'est-à-dire celle pour laquelle la masse M_2 est en bas.

c) Cas général, méthode directe ou méthode de Liapounov

Dans le cas général, la méthode décrite ci-dessus ne permet pas de déterminer les positions d'équilibre. En effet, en absence de potentiel par exemple, la méthode de Lejeune Dirichlet ne pourra pas être appliquée. On appliquera donc la méthode directe.

• *État de mouvement*

Si l'on considère un système mécanique à n paramètres q_i, l'état du mouvement de ce système est défini par une solution connue du système différentiel formé par les équations du mouvement $q_i = q_i(t) \quad \forall i = 1, n$.

Équilibre C'est une solution particulière pour laquelle tous les paramètres sont constants :

$$\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0 \quad \forall i = 1, n.$$

Mouvement stationnaire C'est un problème plus général pour lequel, certains paramètres du mouvement sont constants, tandis que d'autres voient leur vitesse de variation rester constante. Ce type de mouvement est fréquemment rencontré lors de l'étude du fonctionnement de machines en régime permanent.

$$q_i(t) = \text{cste} \quad \forall i = 1, j \quad \text{et} \quad \dot{q}_i(t) = \text{cste} \quad \forall i = j, n$$

• *Détermination de l'équilibre par la méthode directe*

Dans le cas général, on écrit les équations du mouvement et on cherche directement les positions telles que les paramètres du mouvement correspondant à l'état du

mouvement étudié restent constants. S'il s'agit d'un équilibre on remplace $\dot{q}_{\mathrm{i}}$ et $\ddot{q}_{\mathrm{i}}$ $\forall i = 1, n$ par zéro, dans les équations du mouvement, et on cherche une solution q_{i} vérifiant le système d'équation restant.

- *Stabilité au sens de Liapounov*

Soit $([q(t)], [\dot{q}(t)])$ et $([\tilde{q}(t)], [\dot{\tilde{q}}(t)])$ deux états du mouvement distincts provenant de conditions initiales $([q(0)], [\dot{q}(0)])$ et $([\tilde{q}(0)], [\dot{\tilde{q}}(0)])$ très légèrement différentes. On dira que le mouvement est stable si :

$$\forall \lambda \text{ tel que } \begin{cases} q_{\mathrm{i}0} - \tilde{q}_{\mathrm{i}0} < \lambda \\ \dot{q}_{\mathrm{i}0} - \dot{\tilde{q}}_{\mathrm{i}0} < \lambda \end{cases} \quad \exists \epsilon \text{ tel que } \begin{cases} q_{\mathrm{i}}(t) - \tilde{q}_{\mathrm{i}}(t) < \epsilon \\ \dot{q}_{\mathrm{i}}(t) - \dot{\tilde{q}}_{\mathrm{i}}(t) < \epsilon \end{cases} \quad \text{avec } t > 0.$$

On peut aussi exprimer la condition de stabilité de manière globale à l'aide d'une fonction écart qui doit rester petite :

$$r^2 = \sum (q_{\mathrm{i}}(t) - \tilde{q}_{\mathrm{i}}(t))^2 + \sum (\dot{q}_{\mathrm{i}}(t) - \dot{\tilde{q}}_{\mathrm{i}}(t))^2.$$

- *Théorème de Liapounov*

Dans le cas général, lorsqu'on a un équilibre au sens strict du terme, on étudie sa stabilité en linéarisant les équations du mouvement autour de la position d'équilibre étudiée. On aboutit alors à un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, qui peut être résolu analytiquement : l'oscillateur linéaire L associé à ce système est alors le suivant :

$$[M]\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}\right] + [C]\left[\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right] + [F][w] = [0].$$

On cherche des solutions de la forme $[w] = [r]\exp(\omega t)$ où les pulsations propres ω sont solutions de l'équation caractéristiques du système.

$$\Delta = D(\omega) = \mathrm{Det}([M]\,\omega^2 + [C]\,\omega + [K]) = 0.$$

Théorème 9.2 ***Théorème de Liapounov***

Soit L l'oscillateur linéaire associé au système mécanique étudié et à la position d'équilibre S_0. Si toutes les racines de l'équation caractéristique de L ont leur partie réelle négative alors S_0 est stable. Si l'une au moins a sa partie réelle positive, alors S_0 est instable. Si l'une au moins des solutions à sa partie réelle nulle, on ne peut pas conclure.

• *Stabilité asymptotique*

En considérant les mêmes états du mouvement que dans le paragraphe précédent, on dira que le système présente une stabilité asymptotique si pour $t \to \infty$:

$$q_i(t) - \tilde{q}_i(t) \to 0,$$
$$\dot{q}_i(t) - \dot{\tilde{q}}_i(t) \to 0.$$

• *Stabilité orbitale*

Si l'on considère deux points d'origine très voisins dans un système de solides, le système reste stable si :

$$\|\mathbf{MM}^*(t_0)\| < \lambda \Rightarrow \|\mathbf{MM}^*(t)\| < \epsilon \quad \forall t.$$

Si l'on considère, par exemple, deux satellites tournant sur des orbites très proches mais avec des périodes différentes. Si les deux satellites sont très voisins à l'instant t_0, la différence des périodes peut entraîner des écarts importants lorsque t augmente.

9.2 Vibrations autour d'une position d'équilibre stable

9.2.1 Vibrations

a) Introduction

Pour un système donné, si des positions d'équilibre stables ont été identifiées, on peut s'intéresser aux petits mouvements autour de ces positions d'équilibre. L'étude des petits mouvements se fait à l'aide des équations du mouvement linéarisées. Elles ont la forme suivante dans le cas général, où $[q_0(t)]$ est la position courante du point, autour de laquelle la linéarisation est effectuée, et qui évolue au cours du temps :

$$[M([q_0(t)])]\left[\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}\right] + [C([q_0(t)])]\left[\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right] + [K([q_0(t)])]\,[w] = [F([q_0(t)])]\,.$$

Lorsque les mouvements du systèmes sont de petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable $[q_0(t)] = [q_e]$, alors les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ ne dépendent plus du temps.

$$[M([q_e])]\left[\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}\right] + [C([q_e])]\left[\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right] + [K([q_e])]\,[w] = [F([q_e])]\,.$$

Seul le second membre est susceptible de dépendre du temps. On se trouve alors dans le cas de systèmes linéaires d'équations différentielles à coefficients constants, qui peuvent être résolus de manière analytiques.

b) Vibrations libres

Lorsque le second membre de cette équation est nul, que la matrice $[C]$ est nulle et que $[K]$ est symétrique définie positive. Le système est un oscillateur libre :

$$[M]\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}\right] + [K]\,[w] = [0]\,.$$

Les solutions sont des combinaisons linéaires de vecteurs $w(t)$ sinusoïdaux, appelées modes propres, qui sont les vecteurs propres de la matrice $[M]^{-1}\,[K]$, multipliés par $\cos(\omega t)$, où ω^2 est la valeur propre correspondante.

c) Vibrations forcées

Lorsque le second membre est non nul et périodique de pulsation ω_f, que la matrice $[C]$ est nulle et que $[K]$ est symétrique définie positive, on parle alors de vibrations forcées.

$$[M]\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}\right] + [C]\left[\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right] + [K]\,[w] = [F(t)]\,.$$

Les solutions de ce système d'équations, sont des combinaisons linéaires de modes propres plus une solution particulière, qui présente des singularités en $\omega_\mathrm{f} = \omega_\mathrm{i}$ où les ω_i sont les i pulsations propres du système.

d) Vibrations amorties

Lorsque le second membre est nul, que la matrice $[C]$ est une combinaison linéaire quelconque de $[M]$ et $[K]$, on parle alors de vibrations amorties.

$$[M]\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2}\right] + [C]\left[\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right] + [K]\,[w] = [0]$$

Projetée dans la base définie par les vecteurs propres de la matrice $[M]^{-1}\,[K]$, le système est complètement découplé. Les solutions sont des combinaisons linéaires de solutions du type suivant :

$$\epsilon_\mathrm{i}(t) = \exp(-d_\mathrm{i},\, t)\mathrm{Re}\left[a\exp(-t\sqrt{d_\mathrm{i}^2 - \omega_\mathrm{i}^2}) + b\exp(t\sqrt{d_\mathrm{i}^2 - \omega_\mathrm{i}^2}\right],$$

avec $d_\mathrm{i} = \dfrac{c_\mathrm{i}}{2m_\mathrm{i}}$. Ceci correspond en général à une solution sinusoïdale amortie.

10 CHOCS ET PERCUSSIONS

10.1 INTRODUCTION

Lorsque deux solides entrent en contact au cours de leur mouvement, il se produit ce que l'on appelle un « choc ». On s'intéresse à l'état du mouvement juste avant (instant t_1) et juste après le choc (instant t_2), t_1 et t_2 étant très proches, de l'ordre de un centième à un millième de secondes. Pendant cet intervalle de temps, la position d'un point M a très peu changé, tandis que sa vitesse a subi une forte variation. Si l'on confond les instants t_1 et t_2, on parlera alors d'une discontinuité du vecteur vitesse. De ce fait, les techniques de calcul exposées plus haut ne pourront pas être appliquées. L'analyse précise du choc, c'est-à-dire de ce qui se passe entre les instants t_1 et t_2, est un problème très complexe. Lorsque M arrive au contact avec l'obstacle, il se produit des déformations locales qui dépendent de la nature des matériaux en présence, de la vitesse d'impact, de la nature des surfaces. Elle nécessite une étude complète en mécanique des milieux continus, en viscoplasticité et en dynamique et avec établissement et perte de contact, ce qui reste un problème difficile à traiter. En mécanique des solides, on cherche une modélisation simplifiée permettant, si l'on connaît l'état du mouvement avant le choc, de déterminer l'état du mouvement après le choc.

10.2 CAS D'UN POINT MATÉRIEL

En l'absence de choc, le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans un repère galiléen R_g, pour un point matériel M de masse m :

$$m\mathbf{\Gamma}(M/R_g) = \mathbf{F}_{ext}.$$

En intégrant entre deux instants t_1 et t_2, il vient :

$$m\mathbf{V}(t_2, M/R_g) - m\mathbf{V}(t_1, M/R_g) = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \mathbf{F}_{ext}dt.$$

Le second membre de cette équation est appelé l'impulsion intégrée du vecteur $\mathbf{F}_{ext}$ pendant l'intervalle de temps (t_2-t_1). Lorsque la limite de ce second membre, lorsque l'intervalle de temps tend vers zéro, est un vecteur fini non nul, on parle alors de percussion. Ceci correspond physiquement à l'application d'une force très grande pendant un temps très court, du type « Dirac ».

$$\mathbf{P} = \lim_{(t_2-t_1)\to 0} \int_{t=t_1}^{t=t_2} \mathbf{F}_{ext}dt.$$

En intégrant le premier membre du principe fondamental de la dynamique et en passant à la limite, on fait apparaître la discontinuité du vecteur vitesse, à l'instant $t \approx t_2 \approx t_1$, que l'on note de la manière suivante :

$$\lim_{(t_2-t_1)\to 0}(m\mathbf{V}(t_2,\mathrm{M}/\mathrm{R_g}) - m\mathbf{V}(t_1,\mathrm{M}/\mathrm{R_g})) = [\![m\mathbf{V}(t,\mathrm{M}/\mathrm{R_g})]\!] = \mathbf{P}.$$

Par définition $\mathbf{P}$ est appelée le vecteur-percussion à l'instant du choc. Sa dimension physique est $\mathrm{M.L.T}^{-1}$. Si le vecteur percussion est donné, il détermine complètement la discontinuité du vecteur quantité de mouvement lors du choc. Il faut bien comprendre que cette écriture correspond à une vision d'une réalité plus continue, mais pour laquelle les variations de vitesse sont très grandes en un intervalle de temps très court.

10.3 Cas d'un solide ou d'un système de solides

Pour un système de solides Σ, le principe fondamental de la dynamique postule qu'il existe au moins un repère $\mathrm{R_g}$, appelé repère galiléen, pour lequel le torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport à $\mathrm{R_g}$ est égal au torseur des actions mécaniques extérieures à Σ. Cela se note :

$$\left\{\ \mathcal{D}(\Sigma/\mathrm{R_g})\ \right\} = \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma)\ \right\}.$$

Soit m la masse et C le centre de masse du système matériel Σ en mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathrm{R_g}$. On a alors :

$$\left\{\ \mathcal{D}(\Sigma/\mathrm{R_g})\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m\mathbf{\Gamma}(t,\ \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) \\ \delta(t,\ \mathrm{C}/\mathrm{R_g}) \end{array} \right\}_{\mathrm{C}} \quad \left\{\ \mathcal{A}(\overline{\Sigma} \to \Sigma)\ \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}(\overline{\Sigma} \to \Sigma) \\ \mathbf{M}(\mathrm{C},\ \overline{\Sigma} \to \Sigma) \end{array} \right\}_{\mathrm{C}}.$$

En intégrant comme précédemment entre deux instants t_1 et t_2 on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{c} m\mathbf{V}(t_2,\mathrm{C}/\mathrm{R_g}) - m\mathbf{V}(t_1,\mathrm{C}/\mathrm{R_g}) \\ \sigma(\mathrm{C},t_2,\Sigma/\mathrm{R_g}) - \sigma(\mathrm{C},t_1,\Sigma/\mathrm{R_g}) \end{array} \right\}_{\mathrm{C}} = \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R}(\overline{\Sigma} \to \Sigma)\mathrm{d}t \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(\mathrm{C},\overline{\Sigma} \to \Sigma)\mathrm{d}t \end{array} \right\}_{\mathrm{C}}.$$

En supposant que les limites des intégrales des efforts et moments extérieurs ont des limites finies non nulles lorsque l'intervalle de temps tend vers zéro, on obtient l'expression de la discontinuité du vecteur quantité de mouvement et du moment cinétique.

$$\left\{ \begin{array}{c} [\![m\mathbf{V}(t,\mathrm{C}/\mathrm{R_g})]\!] \\ [\![\sigma(t,\mathrm{C},\Sigma/\mathrm{R_g})]\!] \end{array} \right\}_{\mathrm{C}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P} = \displaystyle\lim_{(t_2-t_1)\to 0} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R}(\overline{\Sigma} \to \Sigma)\mathrm{d}t \\ \mathbf{K}(\mathrm{C}) = \displaystyle\lim_{(t_2-t_1)\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(\mathrm{C},\overline{\Sigma} \to \Sigma)\mathrm{d}t \end{array} \right\}_{\mathrm{C}}.$$

1. $\left\{ \begin{array}{c} [\![m\mathbf{V}(t, \mathrm{C}/\mathrm{R_g})]\!] \\ \\ [\![\sigma(t, \mathrm{C}, \Sigma/\mathrm{R_g})]\!] \end{array} \right\}_{\mathrm{C}}$ est la discontinuité du torseur cinétique du système matériel Σ à l'instant du choc t.
2. $\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P} = \displaystyle\lim_{(t_2-t_1)\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R}(\overline{\Sigma} \to \Sigma)\mathrm{d}t \\ \\ \mathbf{K}(\mathrm{C}) = \displaystyle\lim_{(t_2-t_1)\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(\mathrm{C}, \overline{\Sigma} \to \Sigma)\mathrm{d}t \end{array} \right\}_{\mathrm{C}}$ est le torseur des percussions extérieures appliquées au système pendant le choc.

On peut donc énoncer le principe fondamental des chocs : pour tout système matériel en mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathrm{R_g}$, pendant un choc, la discontinuité du torseur cinétique du système matériel à l'instant du choc, est égale au torseur des percussions extérieures appliquées au système. Cela se note :

$$\left\{ [\![\mathcal{C}(\Sigma/\mathrm{R_g})]\!] \right\} = \left\{ \mathcal{P}(\overline{\Sigma} \to \Sigma) \right\}.$$

10.3.1 Remarques

1. À partir du principe fondamental des chocs, on peut, comme pour le principe fondamental de la dynamique, démontrer le théorème des percussions réciproques.

$$\left\{ \mathcal{P}(\Sigma_1 \to \Sigma_2) \right\} = -\left\{ \mathcal{P}(\Sigma_2 \to \Sigma_1) \right\}.$$

2. Toutes les forces qui restent bornées pendant le choc, telles que par exemple, les forces de pesanteur, correspondent à un torseur de percussion nul.
3. Le principe fondamental des chocs est défini dans un repère galiléen. Cependant, lorsqu'on écrit le principe fondamental de la dynamique dans un repère R en mouvement par rapport à $\mathrm{R_g}$, si les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis restent finies au cours du choc, ce qui est généralement le cas, elles correspondent alors à des percussions nulles. On n'aura donc pas à se soucier de ces termes, le principe principe fondamental des chocs pourra être appliqué dans le repère non galiléen R.

10.3.2 Percussion de liaison

Considérons une liaison entre deux solides $\mathrm{S_1}$ et $\mathrm{S_2}$. Si le système subit un choc, il faut introduire à l'instant du choc une percussion de liaison :

$$\left\{ \mathcal{P}(\Sigma_1 \to \Sigma_2) \right\} = -\left\{ \mathcal{P}(\Sigma_2 \to \Sigma_1) \right\}.$$

Si la liaison est parfaite, on supposera que le torseur de percussion de liaison à l'instant du choc, possède les mêmes caractéristiques que le torseur de liaison habituel.

10.3.3 Choc sans frottement entre deux solides

On considère deux solides S_1 et S_2, qui à l'instant t_0 entrent en contact en un point I. Le contact étant supposé sans frottement, le torseur des percussions de contact peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left\{ \mathcal{P}(S_1 \to S_2) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -P\mathbf{n}_{21} \\ \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_I .$$

Le principe fondamental des chocs appliqué au solide S_2 permet alors d'écrire :

$$\left\{ [\![\mathcal{C}(S_2/R_g)]\!] \right\} = \left\{ \mathcal{P}(S_1 \to S_2) \right\} .$$

La valeur de P étant inconnue, cela constitue un système de six équations à sept inconnues. Comme d'habitude, on écrira une loi de comportement pour le choc, qui permettra d'éliminer une inconnue.

a) Définition de e

L'équation supplémentaire, est donnée par la condition au point d'impact :

$$\mathbf{n}_{21} \cdot \left[\mathbf{V}(I \in S_2/R_g) - \mathbf{V}(I \in S_1/R_g) \right]_{t^+} = -e\,\mathbf{n}_{21} \cdot \left[\mathbf{V}(I \in S_2/R_g) - \mathbf{V}(I \in S_1/R_g) \right]_{t^-} ,$$

qui se note aussi :

$$\mathbf{n}_{21} \cdot \mathbf{V}(t^+, I \in S_2/S_1) = e\,\mathbf{n}_{21} \cdot \mathbf{V}(t^-, I \in S_2/S_1),$$

où e est un coefficient qui dépend des matériaux en présence, de la nature des surfaces, de la température.

b) Propriété de e et P

- *Hypothèse des solides indéformables*

Compte tenu de l'hypothèse des milieux solides indéformables, il ne peut pas y avoir interpénétration des deux solides au point de contact. Dans ce cas, compte tenu de la définition de e :

$$\mathbf{n}_{21} \cdot \mathbf{V}(t^+, I \in S_2/S_1) = -e\,\mathbf{n}_{21} \cdot \mathbf{V}(t^-, I \in S_2/S_1).$$

Le coefficient e doit donc être positif ou nul.

- *Principe des puissances virtuelles, premier cas*

On applique le principe des puissances virtuelles au problème du choc et on emploie comme torseur des vitesses virtuelles $\{\mathcal{V}^*\}$ la restriction à chacun des solides de la discontinuité du champ des moments du torseur des vitesses pendant le choc. On

obtient alors, en tenant compte du fait que les torseurs des percussions des actions à distance sont nuls :

$$\left\{ [\![\mathcal{C}(S_1/R_g)]\!] \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_1/R_g) \right\}^* = \left\{ \mathcal{P}(S_2 \to S_1) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_1/R_g) \right\}^*,$$

$$\left\{ [\![\mathcal{C}(S_2/R_g)]\!] \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_2/R_g) \right\}^* = \left\{ \mathcal{P}(S_1 \to S_2) \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_2/R_g) \right\}^*,$$

Comme par ailleurs :

$$\left\{ \mathcal{P}(S_1 \to S_2) \right\} = -\left\{ \mathcal{P}(S_2 \to S_1) \right\},$$

on trouve en additionnant :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2} \left\{ [\![\mathcal{C}(S_i/R_g)]\!] \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_i/R_g) \right\}^* \\ = \; &\left\{ \mathcal{P}(S_1 \to S_2) \right\} \cdot \left(\left\{ \mathcal{V}(S_1/R_g) \right\}^* - \left\{ \mathcal{V}(S_2/R_g) \right\}^* \right) \end{aligned}.$$

On sait également que :

$$\left\{ [\![\mathcal{C}(S_i/R_g)]\!] \right\} \cdot \left\{ \mathcal{V}(S_i/R_g) \right\}^* = \int_{S_i} [\![\mathbf{V}(P/R_g)]\!] \, \mathrm{d}m \cdot \mathbf{V}^*(P/R_g).$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\int_{S_1 \cup S_2} [\![\mathbf{V}(P/R_g)]\!] \, \mathrm{d}m \cdot \mathbf{V}^*(P/R_g) \\ = \; &\left\{ \mathcal{P}(S_1 \to S_2) \right\} \cdot \left(\left\{ \mathcal{V}(S_1/R_g) \right\}^* - \left\{ \mathcal{V}(S_2/R_g) \right\}^* \right) \end{aligned}.$$

On choisit d'abord, comme champ virtuel, la discontinuité du champ des vitesses des points de chacun des solides à l'instant du choc,

$$\mathbf{V}^*(P/R_g) = [\![\mathbf{V}(P/R_g)]\!]$$

Alors :

$$\int_{S_1 \cup S_2} [\![\mathbf{V}(P/R_g)]\!]^2 \, \mathrm{d}m = -P \, \mathbf{n}_{12} \cdot \left[\mathbf{V}(t^+, I \in S_1/S_2) - \mathbf{V}(t^-, I \in S_1/S_2) \right].$$

D'après la loi de choc sans frottement employée :

$$\int_{S_1 \cup S_2} [\![\mathbf{V}(P/R_g)]\!]^2 \, \mathrm{d}m = P(1+e) \, \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{V}(t^-, I \in S_1/S_2).$$

Comme les deux solides sont entrés en contact, il faut qu'avant le choc :

$$\mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{V}(t^-, I, S_1/S_2) > 0.$$

Comme e doit être positif, pour éviter l'interpénétration des surfaces et comme le premier membre est positif, on en déduit que P est nécessairement positif.

Principe des puissances virtuelles, second cas

On applique le principe des puissances virtuelles au problème du choc, et on emploie comme champ de vitesse virtuel, la moyenne de la vitesse avant et après le choc :

$$\mathbf{V}^*(\mathrm{P}/\mathrm{R_g}) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_g})_{\mathrm{t^+}} + \mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_g})_{\mathrm{t^-}}\right].$$

Comme :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{S_1}\cup\mathrm{S_2}} [\![\mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_g})]\!]\,\mathrm{d}m\cdot\mathbf{V}^*(\mathrm{P}/\mathrm{R_g})\\ =\ &\left\{\,\mathcal{P}(\mathrm{S_1}\to\mathrm{S_2})\,\right\}\cdot\left(\left\{\,\mathcal{V}(\mathrm{S_1}/\mathrm{R_g})\,\right\}^* - \left\{\,\mathcal{V}(\mathrm{S_2}/\mathrm{R_g})\,\right\}^*\right)\end{aligned}.$$

alors

$$\int_{\mathrm{S_1}\cup\mathrm{S_2}} \frac{1}{2}(\mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_g})^2_{\mathrm{t^+}} - \mathbf{V}(\mathrm{P}/\mathrm{R_g})^2_{\mathrm{t^+}})\mathrm{d}m = -\frac{P(1-e)}{2}\mathbf{n}_{12}\mathbf{V}(t^-,\mathrm{I}\in\mathrm{S_1}/\mathrm{S_2}),$$

soit encore :

$$[\![\mathrm{T}(\mathrm{S_1}\cup\mathrm{S_2}/\mathrm{R_g})]\!] = -\frac{P(1-e)}{2}\mathbf{n}_{12}\cdot\mathbf{V}(t^-,\mathrm{I}\in\mathrm{S_1}/\mathrm{S_2}).$$

Comme l'énergie cinétique ne peut pas s'accroître pendant le choc, on en déduit $e \leqslant 1$.

Cas particuliers importants

Nous pouvons retenir les deux cas limites suivants :

- **Choc mou.** Cela correspond à $e = 0$. Toute l'énergie est dissipée en déformations plastique, en endommagement des matériaux, en chaleur ou en énergie acoustique.
- **Choc parfaitement élastique.** Cela correspond à $e = 1$, dans ce cas l'énergie cinétique se conserve.

Exemple : Choc direct entre deux sphères

Cet exemple – repris et adapté d'un cours [4] est très important car il permet de bien comprendre les problèmes qui se posent en théorie des chocs. Il est à la base de nombreux développements en mécanique et en physique. Considérons un choc entre deux sphères $\mathrm{S_1}$ et $\mathrm{S_2}$ de masses m_1 et m_2 qui entrent en contact au temps $t = t_1$. On parlera de choc direct lorsque les sphères n'ont pas de rotation. Nous

avons donc la situation de la figure ci-dessous avec G_1 et G_2 les centres de masse des sphères. On a $\mathbf{V}(S_1/R) = V_1\mathbf{x}$ et $\mathbf{V}(S_2/R) = V_2\mathbf{x}$ à l'instant $t = t_0$.

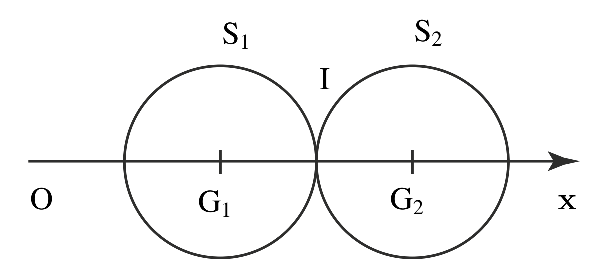


Figure 10.1 **Boules en contact.**

Théorème ***Théorème du moment dynamique appliqué à chaque solide***

$$\mathbf{M}(\text{ext} \rightarrow S_1) = \sigma(G_1 \in S_1/R).$$

Comme aucun moment des efforts extérieurs n'est appliqué en G_1 et que le solide S_1 n'a pas de rotation avant le choc on en déduit que :

$$\mathbf{0} = \underline{\underline{I}}(G_1, S_1) \cdot \left(\mathbf{\Omega}(S_1/R)^+ - \mathbf{\Omega}(S_1/R)^-\right),$$

d'où :

$$\mathbf{\Omega}(S_1/R)^+ = \mathbf{0}$$

Théorème ***Théorème des percussions***

Ce théorème donne la discontinuité du vecteur quantité de mouvement en projection sur $\mathbf{x}$:

$$m_1(\mathbf{V}_1^+ - \mathbf{V}_1^-) + m_2(\mathbf{V}_2^+ - \mathbf{V}_2^-) = 0 \qquad (10.1)$$

On constate à ce stade qu'il est impossible de déterminer les vitesses car nous n'avons qu'une équation scalaire avec les deux inconnues $(\mathbf{V}_1^+ - \mathbf{V}_1^-)$ et $(\mathbf{V}_2^+ - \mathbf{V}_2^-)$. Il est donc nécessaire d'ajouter une information liée à la nature du choc (et donc à celle des corps en présence). Nous allons examiner la quantité $G_1G_2 = \ell$ avant et pendant le choc.

- **Avant le choc.** ℓ varie mais les efforts extérieurs appliqués sont nuls. Le travail de ces efforts et donc nul. Les actions de l'un des solides sur le second augmentent.

- **Pendant le choc.** Cette distance varie dans la pratique car les solides ne sont pas indéformables. On imagine sans peine une première phase avec ℓ qui diminue (les solides se rapprochent en raison de la déformation sur la zone de contact) puis une seconde avec ℓ qui augmente (les solides retrouvent leur forme initiale). Les actions de l'un des solides sur le second diminuent. La vitesse relative de S_1 par rapport à S_2 passe par zéro. En conséquence les vitesses des centres d'inertie sont égales (en valeur absolue).

Corps parfaitement élastiques : ce cas correspond à des solides qui reprennent exactement leur forme initiale après le choc. Dans ce cas il n'y a aucune énergie dissipée pendant le choc (ou la puissance des efforts intérieurs est nulle). On a dans ce cas :

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \mathrm{T}^+ - \mathrm{T}^- = 0.$$

Cela donne donc :

$$m_1\left((V_1^+)^2 - (V_1^-)^2\right) + m_2\left((V_2^+)^2 - (V_2^-)^2\right) = 0,$$

ce qui combiné avec la relation $m_1(V_1^+ - V_1^-) + m_2(V_2^+ - V_2^-) = 0$ (équation (10.1)) permet d'écrire vectoriellement :

$$\mathbf{V}(\mathrm{S}_2/\mathrm{S}_1)^+ = -\mathbf{V}(\mathrm{S}_2/\mathrm{S}_1)^-.$$

Au cours du choc il n'y a qu'un changement de vitesse relative en signe mais pas en module. Il est alors possible de déterminer les vitesses finales :

$$V_1^+ = V_1^- - 2\frac{V_1^- - V_2^-}{1 + \frac{m_1}{m_2}}, \qquad V_2^+ = V_2^- + 2\frac{V_1^- - V_2^-}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

On peut étudier ces résultats dans quelques cas :

- **Masses égales.** On en déduit :

$$\begin{cases} V_1^+ & = & V_2^-, \\ V_2^+ & = & V_1^-. \end{cases}$$

  Il y a donc de fait « échange des vitesses ».

- **Masse $m_2 \rightarrow \infty$ et $V_2^- = 0$.** Cela donne :

$$V_2^+ = 0.$$

  et

$$V_1^+ = -V_1^-$$

  Ce cas correspond au cas d'une balle rigide qui vient frapper un objet (un mur par exemple) fixe. L'énergie de la balle est conservée et elle repart en sens inverse à la même vitesse (en module).

- **Corps inélastiques.** Dans le cas général on ne trouve pas de solides parfaitement élastiques ou parfaitement mous. Cela s'exprime par un coefficient tel que :

$$V_1^+ - V_2^+ = -e(V_1^- - V_2^-).$$

Dans ce cas, les vitesses finales, s'expriment alors comme suit :

$$V_1^+ = \frac{m_1 V_1^- + m_2 V_2^- - e m_2 (V_1^- - V_2^-)}{m_1 + m_2}$$

$$V_2^+ = \frac{m_1 V_1^- + m_2 V_2^- + e m_2 (V_1^- - V_2^-)}{m_1 + m_2}.$$

Nous pouvons remarquer que notre incapacité – à ce stade – à décrire les détails de ce qui se passe pendant le choc se traduit non en information sur la perte d'énergie mais sur la variation des vitesses. Ce paramètre étant facilement mesurable.

Perte d'énergie

On reprend l'expression de la variation d'énergie cinétique pendant le choc et combinées avec les relations (10.1) et la définition de e on obtient :

$$\mathrm{T}^+ - \mathrm{T}^- = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1 - e^2)(V_1^- - V_2^-)^2.$$

Les deux cas limites sont retrouvés :

Solides élastiques Dans ce cas on a $e = 1$ donc :

$$\mathrm{T}^+ = \mathrm{T}^-,$$

ce cas correspond à une absence de dissipation d'énergie pendant le choc.

Solides parfaitement mous Dans ce cas on a $e = 0$ donc :

$$\mathrm{T}^+ - \mathrm{T}^- = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(V_1^- - V_2^-)^2.$$

Calcul de la percussion

Supposons que le vecteur percussion est donné par $\mathbf{P}(\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2) = P\mathbf{x}$, on a l'égalité :

$$\mathbf{P}(\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2) = m_2(\mathbf{V}_2^+ - \mathbf{V}_2^-),$$

qui permet donc d'écrire :

$$\mathbf{P}(\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2) = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + e)(V_1^- - V_2^-).$$

Nous obtenons pour un choc élastique avec des sphères de masse 1 kg projetées à $\pm$ 5 m/s une percussion de 10 kg.m.s^{-1}. Il est à remarquer que la percussion est connue sans que pour autant la durée du choc ni les actions de contact le soient. On peut faire un parallèle avec la résultante et le moment de liaison pour une liaison parfaite qui sont connus sans que la répartition locale des actions soient connues. Pour aller plus loin il est nécessaire - comme pour les actions de contact - de supposer que les solides sont déformables et de comportement élastique isotrope (mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace). Dans ce cas deux constantes caractérisent le comportement : E le module d'Young (en Pa) et ν le coefficient de Poisson.

Contact de Hertz

L'objectif est de montrer que les solutions (non démontrées) issues des travaux de Hertz peuvent être utilisées pour illustrer la théorie des chocs. On suppose que deux sphères S_1 et S_2 de rayon R_1 et R_2 sont en contact sous l'action de forces extérieures $\mathbf{F}$. La distance G_1G_2 est notée ℓ. On note $\alpha = R_1+R_2-\ell$ le rapprochement des centres des sphères sous l'effet de l'effort appliqué. Hertz a donné une solution analytique :

$$\alpha = (\frac{9\pi}{16}(K_1 + K_2)\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} F^2)^{1/3},$$

avec les notations de Hertz : $K_1 = \dfrac{1 - \nu_1}{\pi E_1}$ et $K_2 = \dfrac{1 - \nu_2}{\pi E_2}$.
On en déduit :

$$F(S_1 \rightarrow S_2) = k\alpha^{3/2},$$

avec k la raideur du ressort non linéaire obtenu.

Étude du mouvement du système

On peut appliquer le théorème fondamental de la résultante dynamique à chaque solide :

$$\mathbf{F}(S_1 \rightarrow S_2) = m_2\Gamma(S_2/R),$$

$$\mathbf{F}(S_2 \rightarrow S_1) = m_1\Gamma(S_1/R),$$

ce qui donne, sachant que $\Gamma(S_1/R) = \ddot{x}_{G_1}\mathbf{x}_0$ (idem pour S_1) et que $F = \dfrac{k}{m}\alpha^{3/2}$:

$$\ddot{\alpha} + k\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\alpha^{3/2} = 0.$$

Cette équation est non linéaire mais on la multiplie par $\dot{\alpha}$ et l'intégration est immédiate :

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + k\frac{2(m_1 + m_2)}{5m_1 m_2}\alpha^{5/2} = \text{cste}.$$

On prend en compte les conditions initiales : $t = t^-$ $\dot{\alpha}^- = -\dot{\ell} = (V_2^- - V_1^-)$ et $\dot{\alpha}^+ = (V_2^+ - V_1^+)$; on en déduit en reportant ces conditions dans l'intégrale première :

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + k\frac{2(m_1 + m_2)}{5m_1m_2}\alpha^{5/2} = \frac{1}{2}(V_2^+ - V_1^+)^2.$$

Il est possible de calculer, lorsque la vitesse s'annule, le rapprochement (qui est maximal) ; il vaut :

$$\alpha_{max} = \frac{m_1m_2}{2k(m_1 + m_2)}(V_2^+ - V_1^+)^2.$$

Durée du choc

Il faut étudier la première phase avant l'instant correspondant au rapprochement maximal. En posant $\alpha/\alpha_{max} = a$ on trouve après quelques calculs :

$$t_{\max} - t^- = \frac{a_{\max}}{(V_2^+ - V_1^+)}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1 - a^{5/2}}} = 1,47\frac{a_{\max}}{(V_2^+ - V_1^+)}.$$

Pour la 2e phase qui correspond à la détente élastique des deux sphères on a le même type d'intégrale à évaluer :

$$t^+ - t_{\max} = \frac{a_{\max}}{(V_2^+ - V_1^+)}\int_1^0 \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1 - a^{5/2}}} = 2,94\frac{a_{\max}}{(V_2^+ - V_1^+)}.$$

Nous venons de déterminer la durée du choc en fonction des données du problème. Il est donc possible d'évaluer la force au cours du temps pendant le choc :

$$F(\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2) = k\alpha^{3/2},$$

avec $\alpha(t)$ connu par l'équation différentielle du mouvement. On peut connaître l'effort maximal (correspondant à $\alpha_{\max}$, et la percussion par intégration de l'effort pendant la durée du choc.
L'intérêt de la théorie des chocs est de fournir un cadre cohérent et simplificateur qui, pour une démarche de dimensionnement en bureau d'études, et suffisante dans un premier temps.

Partie VI

Quelques rappels mathématiques sur les torseurs et les tenseurs

11 CALCUL VECTORIEL

11.1 OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

11.1.1 Produit scalaire

a) Définition

Le produit scalaire des deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est le nombre réel suivant noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{u},\ \mathbf{v}).$$

b) Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. Symétrie : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. Distributivité : $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
3. Multiplication par un réel : $\lambda \mathbf{u} \cdot \alpha \mathbf{v} = \lambda \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

c) Expression analytique

Dans une base orthonormée $(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z})$ le produit scalaire des deux vecteurs $\mathbf{v}_1$ de composantes $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ et $\mathbf{v}_2$ de composantes $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ s'écrit :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2.$$

11.1.2 Produit vectoriel

a) Définition

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est le vecteur (pseudo vecteur dans la réalité) noté $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ tel que, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ soit perpendiculaire au plan $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, le trièdre $(\mathbf{u},\ \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ soit direct et la norme de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ soit égale à :

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

b) Interprétation géométrique

La norme du produit vectoriel $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, représente la surface du parallélogramme défini par les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

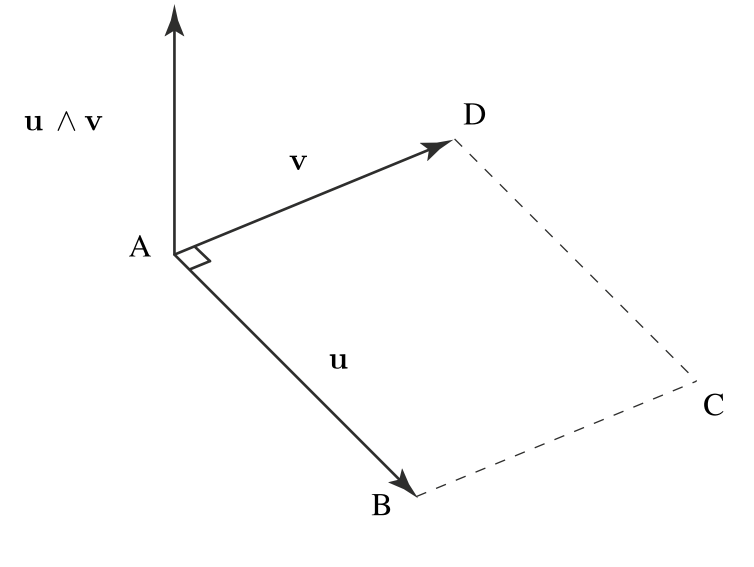


Figure 11.1 **Produit vectoriel**

c) Propriétés

1. Antisymétrie : $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
2. Distributivité par rapport à l'addition : $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$.
3. Multiplication par un réel : $\lambda\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{v} = \lambda\alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$.
4. Application à une base orthonormée directe $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0 & \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} = -\mathbf{z} & \mathbf{z} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{z} & \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} = 0 & \mathbf{z} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{x}, \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} = -\mathbf{y} & \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{x} & \mathbf{z} \wedge \mathbf{z} = 0. \end{array}$$

11.1.3 Double produit vectoriel (Formule de Gibbs)

Le double produit vectoriel est noté $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.

a) Expression analytique

Dans une base orthonormée $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ le produit vectoriel des deux vecteurs $\mathbf{v}_1$ de composantes (x_1, y_1, z_1) et $\mathbf{v}_2$ de composantes (x_2, y_2, z_2) s'écrit :

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\,\mathbf{x} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\,\mathbf{y} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\,\mathbf{z}.$$

11.1.4 Produit mixte

a) Définition

Le produit mixte des trois vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ est le nombre réel suivant est noté $(\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w})$:

$$(\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

b) Interprétation géométrique

La valeur absolue du produit mixte $(\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w})$ représente le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$.

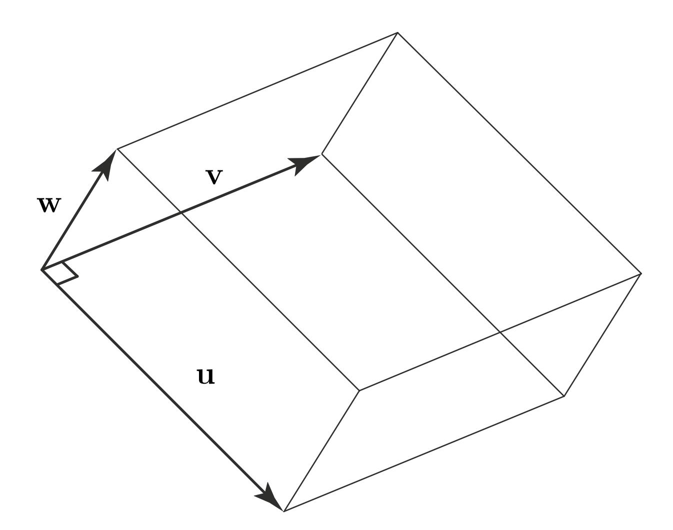


Figure 11.2 **Produit mixte**

c) Propriétés

1. Permutation des opérateurs : $(\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.
2. Distributivité par rapport à l'addition : $(\mathbf{u} + \mathbf{x},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}) = (\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}) + (\mathbf{x},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w})$.
3. Multiplication par un réel : $(\lambda\mathbf{u},\ \alpha\mathbf{v},\ \gamma\mathbf{w}) = \lambda\alpha\gamma(\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w})$.
4. Permutation des vecteurs : $(\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}) = -(\mathbf{v},\ \mathbf{u},\ \mathbf{w})$.
5. Permutation circulaire : $(\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}) =(\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{u}) = (\mathbf{w},\ \mathbf{u},\ \mathbf{v})$.

d) Expression analytique

Dans une base orthonormée $(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z})$ le produit mixte des trois vecteurs $\mathbf{v}_1$ de composantes $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathbf{v}_2$ $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ et $\mathbf{v}_3$ $(x_3,\ y_3,\ z_3)$ se calcule comme le déterminant suivant :

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= -x_3\, y_2\, z_1 + x_2\, y_3 z_1 + x_3\, y_1\, z_2 - x_1\, y_3\, z_2 - x_2\, y_1\, z_3 + x_1\, y_2\, z_3.$$

11.1.5 Division vectorielle

a) Définition

Soient deux vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ non nuls et orthogonaux, le résultat de la division vectorielle est l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ tels que : $\mathbf{A} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{B}$.

b) Solution générale

L'ensemble $\mathbf{x}$ est défini de la manière suivante, α étant un réel : $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} + \alpha\, A.$

11.2 Champs de vecteurs

11.2.1 Glisseur

a) Définition

Un glisseur est défini par un vecteur $\mathbf{v}$ et un point P quelconque de son support et noté (P, $\mathbf{v}$). Un représentant de ce glisseur est un bipoint, appartenant à la droite (D) définie par (P, $\mathbf{v}$). Ici, par exemple, le bipoint AB ou le bipoint CD.

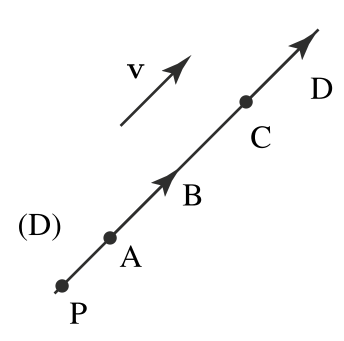


Figure 11.3 **Glisseur.**

11.2.2 Moment en un point d'un glisseur

a) Définition

On appelle moment au point A du glisseur (P, $\mathbf{v}$), noté $\mathbf{M}_A(P, \mathbf{v})$ ou $\mathbf{M}(A, \mathbf{v})$ le vecteur suivant :

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{v}) = \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{PA}.$$

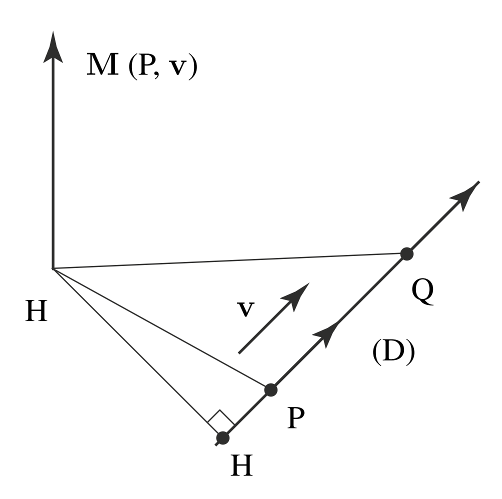


Figure 11.4 **Glisseur.**

Remarque

Nous noterons parfois $\mathbf{M}_A$ le vecteur moment en A et parfois $\mathbf{M}(A, \mathbf{F})$ ce moment selon le contexte et pour rendre le document le plus lisible possible.

b) Interprétation géométrique

Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la droite (D) définie par le glisseur. La norme du moment du glisseur (P, $\mathbf{v}$) au point A, est égale à :

$$\|\mathbf{M}_A(P, \mathbf{v})\| = \|\mathbf{AH}\| \, \|\mathbf{v}\|.$$

c) Propriétés

1. Le moment au point A du glisseur (P, $\mathbf{v}$) est indépendant du choix du point P sur le support (D) du glisseur.
2. Champ des moments :

$$\mathbf{M}_B(P, \mathbf{v}) = \mathbf{BP} \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{BA}+\mathbf{AP}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v}+\mathbf{BA} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{M}_A(P, \mathbf{v})+\mathbf{BA} \wedge \mathbf{v}.$$

$$\mathbf{M}_B(P, \mathbf{v}) = \mathbf{M}_A(P, \mathbf{v}) + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{v}.$$

11.2.3 Moment d'un glisseur par rapport à un axe

a) Définition

On appelle moment par rapport à l'axe Δ (A, x) du glisseur (P, $\mathbf{v}$) le nombre réel suivant :

$$M_{\Delta}(\mathrm{P}, \mathbf{v}) = x \cdot \mathbf{M}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathbf{v}) = (\mathbf{x}, \mathbf{AP}, \mathbf{v}).$$

b) Interprétation géométrique

Le moment du glisseur (P, $\mathbf{v}$) par rapport à l'axe Δ(A, x) est égal au produit du bras de levier OH, par la composante $\mathbf{w}$ du vecteur $\mathbf{v}$, perpendiculaire à la fois au bras de levier et à l'axe.

$$\mathrm{M}_{\Delta}(\mathrm{P}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{HO}\| \, \|\mathbf{w}\| \text{ et } \|\mathbf{M}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathbf{v})\| = \|\mathbf{AN}\| \, \|\mathbf{v}\|.$$

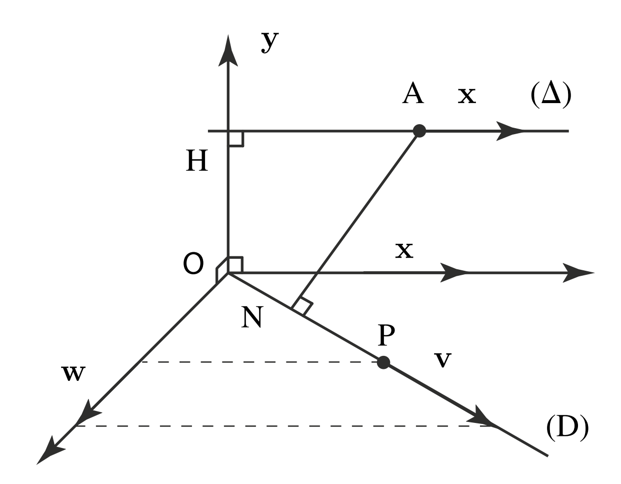


Figure 11.5 **Moment d'un glisseur**

11.2.4 Ensembles de glisseurs

a) Ensemble fini de glisseurs

Si l'on considère un ensemble fini de n glisseurs (P_i, $\mathbf{v}_i$), deux grandeurs peuvent être définies, la résultante $\mathbf{R}$ et le moment au point A, $\mathbf{M}_{\mathrm{A}}$, de l'ensemble fini de glisseurs.

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i.$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{AP}_i \wedge \mathbf{v}_i.$$

Alors le champ des moments de l'ensemble fini de glisseurs vérifie aussi :

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B}} = \mathbf{M}_{\mathrm{A}} + \mathbf{R} \wedge \mathbf{AB}.$$

b) Ensemble infini de glisseurs

Si l'on considère un ensemble infini de glisseurs (P, $\mathbf{F}$(P)), où $\mathbf{F}$(P) est une densité de champ de vecteurs définie en tout point P d'un domaine E. Deux grandeurs peuvent être définies, la résultante $\mathbf{R}$, et le moment au point A, $\mathbf{M}_{\mathrm{A}}$ de l'ensemble infini de glisseurs.

$$\mathbf{R} = \int_{\mathrm{P} \in \mathrm{E}} \mathbf{F}(\mathrm{P}) \mathrm{d}v.$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{A}} = \int_{\mathrm{P} \in \mathrm{E}} \mathbf{AP} \wedge \mathbf{F}(\mathrm{P}) \mathrm{d}v.$$

Alors le champ des moments de l'ensemble fini de glisseurs vérifie encore :

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B}} = \mathbf{M}_{\mathrm{A}} + \mathbf{R} \wedge \mathbf{AB}.$$

DÉRIVATION VECTORIELLE

12

12.1 DÉRIVÉE D'UN VECTEUR

12.1.1 Définition

Par définition la dérivée d'un vecteur $\mathbf{v}(t)$ par rapport à la variable t, dans l'espace vectoriel E est le vecteur suivant :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{E}} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{v}(t+h)-\mathbf{v}(t)}{h}.$$

Par conséquent, la dérivée d'un vecteur $\mathbf{v}$ dépend du choix de l'espace vectoriel de référence dans lequel est exprimé le vecteur. En pratique, il est donc nécessaire de toujours préciser par rapport à quel référentiel du mouvement est effectuée la dérivée.

12.1.2 Propriétés

1. Somme :

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

2. Produit par une fonction scalaire f :

$$\left.\frac{\mathrm{d}(f(t)\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = f(t)\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}.$$

3. Dérivée du produit scalaire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}\cdot\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

4. Dérivée d'un produit vectoriel :

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}\wedge\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\wedge\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.$$

5. Dérivée d'un produit mixte :

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,\mathbf{v}_3)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left(\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}},\,\mathbf{v}_2,\,\mathbf{v}_3\right) + \left(\mathbf{v}_1,\,\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}},\,\mathbf{v}_3\right) + \left(\mathbf{v}_1,\,\mathbf{v}_2,\,\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_3}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}\right).$$

6. Dérivée d'une fonction de fonction :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(\theta(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\theta}\right|_{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

12.2 Changement de base de dérivation

12.2.1 Vocabulaire

La base dans laquelle on exprime les composantes des vecteurs sera indifféremment appelée, base de calcul ou base de projection. La base dans laquelle est effectuée la dérivation, sera indifféremment appelée base de dérivation ou référentiel du mouvement.

12.2.2 Dérivée d'un vecteur exprimé dans la base de dérivation

Dans ce cas particulier, la base de projection est confondue avec le référentiel du mouvement choisi. Alors, si un vecteur $\mathbf{v}$ s'exprime dans cette base $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ à l'aide de trois composantes (a, b, c), comme les trois vecteurs unitaires de cette base sont constants :

$$\left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_R = \frac{da}{dt}\mathbf{x} + \frac{db}{dt}\mathbf{y} + \frac{dc}{dt}\mathbf{z}.$$

12.2.3 Dérivée d'un vecteur exprimé dans une base distincte de la base de dérivation

Supposons une base de projection $R_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ dans laquelle le vecteur $\mathbf{v}$ est exprimé à l'aide de trois composantes (a_1, a_2, a_3). Supposons aussi une base $R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ attachée au référentiel du mouvement et distincte de la première. Lors de la dérivation du vecteur $\mathbf{v}$ par rapport au référentiel du mouvement R, il faut tenir compte du fait que les vecteurs unitaires de la base R_1 dans laquelle est exprimé le vecteur $\mathbf{v}$ ne sont pas constants dans la base de dérivation R. Ainsi :

$$\left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_R = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{da_i}{dt}\mathbf{x}_i + a_i \left.\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}\right|_R\right).$$

Soit en rassemblant les termes :

$$\left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{R_1} + \sum_{i=1}^{3}\left.\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}\right|_R.$$

À ce stade nous avons besoin de l'expression des dérivées des vecteurs unitaires de la base R_1 par rapport au référentiel du mouvement R. L'orientation d'une base par rapport à une autre se définit à l'aide de trois angles de rotation $(\alpha_k, k = 1, 3)$. Alors :

$$d\mathbf{x}_i|_R = \sum_{k=1}^{3}\left.\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \alpha_k}\right|_R d\alpha_k \quad \forall i,$$

et

$$\left.\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}\right|_R = \sum_{k=1}^{3}\left.\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \alpha_k}\right|_R \frac{d\alpha_k}{dt} \quad \forall i.$$

Par ailleurs, les paramètres α_k étant des angles de rotation, on a :

$$\left.\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \alpha_k}\right|_R = \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{x}_i.$$

Par suite :

$$\left.\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}\right|_R = \sum_{k=1}^{3} \frac{d\alpha_k}{dt}\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{x}_i \quad \forall i.$$

Si l'on définit un vecteur $\mathbf{\Omega}$ de la façon suivante :

$$\mathbf{\Omega}(R_1/R) = \sum_{k=1}^{3} \frac{d\alpha_k}{dt}\mathbf{e}_k,$$

il vient

$$\left.\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}\right|_R = \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{x}_i.$$

On en déduit alors la formule de changement de base de dérivation :

$$\left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{R_1} + \mathbf{\Omega}(S_2/R_1) \wedge \mathbf{v},$$

Où $\mathbf{\Omega}$ est le vecteur vitesse de rotation de la base R_1 par rapport à la base R.

12.2.4 Propriétés du vecteur vitesse de rotation

a) Composition des rotations

Étant donné un vecteur **v**, on peut écrire successivement :

$$\left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{R_2} + \mathbf{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \mathbf{v},$$

et

$$\left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{R_3} + \mathbf{\Omega}(R_3/R_2) \wedge \mathbf{v}.$$

Alors

$$\left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{R_3} + (\mathbf{\Omega}(R_3/R_2) + \mathbf{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \mathbf{v},$$

soit :

$$\mathbf{\Omega}(R_3/R_1) = \mathbf{\Omega}(R_3/R_2) + \mathbf{\Omega}(R_2/R_1).$$

b) Inversion des bases de dérivations

On a

$$\left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{R_2} + \mathbf{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \mathbf{v},$$

et

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_2} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} - \boldsymbol{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \mathbf{v},$$

ce qui donne par addition :

$$\boldsymbol{\Omega}(R_1/R_2) = -\boldsymbol{\Omega}(R_2/R_1).$$

12.3 Champ équiprojectif de vecteurs

12.3.1 Définition

Un champ de vecteur $\mathbf{v}$ est équiprojectif si :

$$\forall A, \forall B \quad \mathbf{AB} \cdot \mathbf{v}_A = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{v}_B.$$

12.3.2 Propriétés

1. Si un champ de vecteur équiprojectif est connu en trois points non alignés de l'espace, alors il est connu en tout point P.
2. Par ailleurs si deux champs de vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont équiprojectifs alors $a\mathbf{v}_1+b\mathbf{v}_2$ est équiprojectif aussi quels que soient les deux réels a et b choisis.

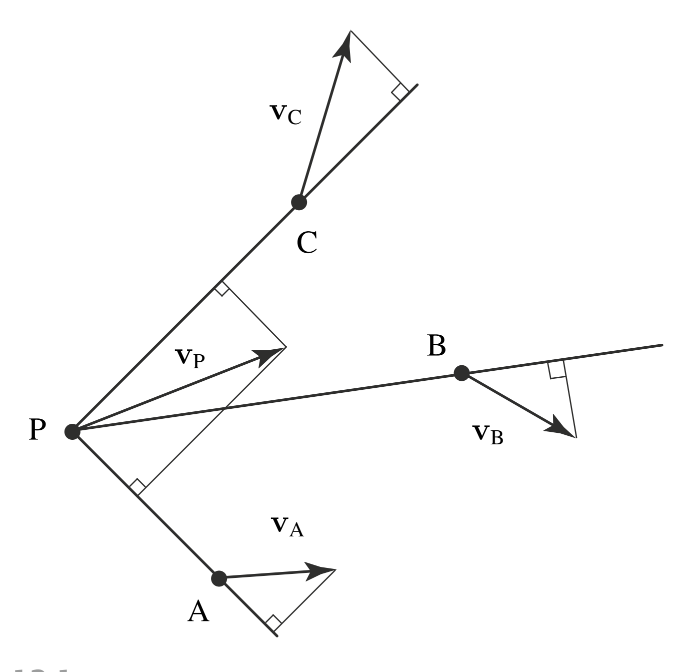


Figure 12.1 Champ équiprojectif

12.4 TORSEURS

Le torseur est l'outil privilégié de la mécanique du solide. Il est utilisé pour représenter le mouvement d'un solide, caractériser une action mécanique, formuler le principe fondamental de la dynamique de manière générale.

12.4.1 Définitions

Un torseur est un ensemble défini par ses deux éléments dits éléments de réduction.

1. Un vecteur noté $\mathbf{R}$ appelé la résultante du torseur.
2. Un champ de vecteur $\mathbf{M}$ vérifiant la relation :

$$\forall \mathrm{A}, \forall \mathrm{B} \quad \mathbf{M}_{\mathrm{B}} = \mathbf{M}_{\mathrm{A}} + \mathbf{R} \wedge \mathbf{AB}.$$

3. $\mathbf{M}_{\mathrm{A}}$ est appelé le moment au point A du torseur $\{\mathcal{T}\}$.
4. Le torseur $\{\mathcal{T}\}$ se note de la façon suivante au point A.

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_{\mathrm{A}} \end{array} \right\}.$$

12.4.2 Champ des moments d'un torseur.

Le champ des moments d'un torseur est équiprojectif et réciproquement, tout champ de vecteur équiprojectif est le champ des moments d'un torseur.

a) Démonstration

Remarque

Si un solide est indéformable, le champ des vecteurs vitesse des points de ce solide est nécessairement équiprojectif. Par conséquent il est représentable par un torseur, dont le vecteur moment est le vecteur vitesse du point considéré. On verra plus loin que la résultante du torseur est aussi le vecteur rotation de ce solide.

12.4.3 Invariants du torseur

Entre deux points quelconques A et B de l'espace, deux composantes du torseur sont conservées, qui constituent les deux invariants du torseur :

1. Premier invariant : la résultante $\mathbf{R}$.
2. Second invariant : la projection du moment du torseur sur sa résultante :

$$\forall \mathrm{A}, \forall \mathrm{B} \quad \mathbf{M}_{\mathrm{B}} = \mathbf{M}_{\mathrm{A}} + \mathbf{R} \wedge \mathbf{AB} \Rightarrow \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{\mathrm{A}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{\mathrm{B}}.$$

12.4.4 Point central, axe central, moment central d'un torseur

a) Point central

Point où le moment du torseur à la même direction que la résultante.

b) Axe central

Ensemble des points centraux. On se propose de montrer que les points centraux sont alignés sur un même axe, pour un torseur $\{\mathcal{T}\}$, qui se note au point A :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_{\mathrm{A}} \end{array} \right\}.$$

Le moment au point A du torseur peut se décomposer en deux termes, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$, où $\mathbf{u}$ est la composante de $\mathbf{M}_{\mathrm{A}}$ selon $\mathbf{R}$ et $\mathbf{w}$ est orthogonal à $\mathbf{R}$ alors :

$$\mathbf{M}_{\mathrm{A}} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \text{ avec } \mathbf{u} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{w} \cdot \mathbf{R} = 0.$$

Si B est un point central, du fait du second invariant, $\forall A, \quad M_{\mathrm{B}} = \mathbf{u}$. Comme $M_{\mathrm{B}} = \mathbf{M}_{\mathrm{A}} + \mathbf{R} \wedge \mathbf{AB} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{w} + \mathbf{R} \wedge \mathbf{AB} \Rightarrow \mathbf{R} \wedge \mathbf{AB} = -\mathbf{w}$. Par division vectorielle, on en déduit :

$$\mathbf{AB} = \frac{\mathbf{R} \wedge M_{\mathrm{A}}}{\mathbf{R}^2} + \alpha\mathbf{R}.$$

ainsi si l'on pose : $\mathbf{AH} = \dfrac{R \wedge M_{\mathrm{A}}}{R^2}$ alors les points centraux s'alignent sur une droite de même direction que la résultante du torseur $\mathbf{R}$ et passant par le point H.

c) Moment central

Le moment central est le moment du torseur en un point quelconque de son axe central. La norme du moment d'un torseur est minimale pour les points centraux. Par conséquent si le moment d'un torseur est nul en un point, ce point appartient à l'axe central. L'axe central se définit alors à l'aide de ce point et de la résultante.

12.4.5 Symétrie du champ des moments d'un torseur. Origine du mot torseur

Soit R(B, x, y, z) un repère orthonormé direct, dont l'axe (B, z) est confondu avec l'axe central d'un torseur $\{\mathcal{T}\}$. Posons alors :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} = R\mathbf{z} \\ \mathbf{M}_{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{B}}\mathbf{z} \end{array} \right\}.$$

Si l'on choisit un axe (H, u) quelconque dans un plan orthogonal à z et qui rencontre l'axe (B, z) au point H, et un nouveau repère associé à cet axe R' (H, u, v, z), alors pour un point A quelconque appartenant à cet axe :

$$\mathbf{BH} = h\,\mathbf{z} \text{ et } \mathbf{HA} = r\,u \Rightarrow \mathbf{M}_{\mathrm{A}} = \mathbf{M}_{\mathrm{B}} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{R} = Mb\,\mathbf{z} + Rr\,\mathbf{v}.$$

D'où l'expression du moment du torseur $\{\mathcal{T}\}$ au point A :

$$\mathbf{M}_{\mathrm{A}} = Mb\,\mathbf{z} + Rr\,\mathbf{v}.$$

1. Lorsque la distance r de A à l'axe central (B, z) est nulle $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B$.
2. Lorsque la distance r augmente le moment du torseur au point A tourne progressivement dans le plan (v, z) jusqu'à s'aligner avec la direction v.
3. Ainsi, observe-t-on une « torsion » du moment du torseur au point A, lorsque le point A s'éloigne de l'axe central du torseur, d'où l'origine du mot torseur.

12.5 Opérations sur les torseurs

12.5.1 Addition

La somme de deux torseurs $\{\mathcal{T}\}$ et $\{\mathcal{T}\}'$ est le torseur $\{\mathcal{T}\} + \{\mathcal{T}\}'$. Pour faire la somme de deux torseurs, il faut au préalable les écrire au même point :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_A \end{array} \right\},$$

$$\{\mathcal{T}\}' = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}' \\ \mathbf{M}'_A \end{array} \right\}.$$

On vérifie ensuite que $\{\mathcal{T}\} + \{\mathcal{T}\}'$ est bien un torseur. C'est-à-dire que son champ des moments vérifie bien la relation suivante :

$$\mathbf{M}_B(\{\mathcal{T}\} + \{\mathcal{T}\}') = \mathbf{M}_A(\{\mathcal{T}\} + \{\mathcal{T}\}') + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{R}(\{\mathcal{T}\} + \{\mathcal{T}\}') \quad \forall A, \forall B.$$

La démonstration est évidente.

12.5.2 Multiplication par un réel

Soit $\{\mathcal{T}\}$ un torseur et λ un réel :

$$\lambda \{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \mathbf{R} \\ \lambda \mathbf{M}_A \end{array} \right\}.$$

12.5.3 Décomposition

a) Torseur couple

Un torseur couple est un torseur dont la résultante est nulle.

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\}.$$

Le moment d'un torseur couple est le même en tout point de l'espace. Un torseur couple peut être représenté par un ensemble de glisseurs de direction parallèle, de même norme et de sens contraire. En effet, si l'on considère deux glisseurs (P, $\mathbf{v}$) et (A, $-\mathbf{v}$), alors le torseur associé à cet ensemble de glisseurs vaut :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{AP} \wedge \mathbf{v} \end{array} \right\}.$$

b) Torseur à résultante

Un torseur à résultante est un torseur dont le moment central est nul.

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{\mathrm{B}},$$

avec $\mathbf{R} \neq 0$ et $\mathrm{B} \in \Delta$, où Δ est l'axe central du torseur.

12.6 Champ de vecteurs antisymétriques

Soit un espace vectoriel euclidien E^{n} de dimension n (nous utilisons cette notation classique dans cette annexe). Une application $\mathbf{f}$ de E^{n} dans E^{n} est symétrique si :

$$\forall \mathbf{u} \in E^{\mathrm{n}}, \quad \forall \mathbf{v} \in E^{\mathrm{n}}, \quad \mathbf{u}.\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Elle est antisymétrique si :

$$\forall \mathbf{u} \in E^{\mathrm{n}}, \quad \forall \mathbf{v} \in E^{\mathrm{n}}, \quad \mathbf{u}.\mathbf{f}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Propriété

1. Toute application $\mathbf{f}$ (anti)symétrique de E^{n} dans E^{n} est linéaire.

$$\forall \mathbf{u} \in E^{\mathrm{n}}, \quad \forall \mathbf{v} \in E^{\mathrm{n}}, \quad \mathbf{f}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = (-)(\alpha\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{v})).$$

2. La matrice dans une base orthonormée d'une application (anti)symétrique est (anti)symétrique.

$$\forall \mathrm{i} = 1, ..., \mathrm{n} \quad \forall \mathrm{j} = 1, ..., \mathrm{n} \quad a_{\mathrm{ij}} = (-)a_{\mathrm{ji}}.$$

Théorème 12.1

Si $\mathbf{f}$ est une application antisymétrique de E^3, il existe un vecteur $\mathbf{R}$ unique de E^3 appelé vecteur caractéristique de $\mathbf{f}$ tel que :

$$\forall \mathbf{u} \in E^3 \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{R} \wedge \mathbf{u}.$$

Si les coordonnées de $\mathbf{R}$ dans une base orthonormée de E^3 sont r_x, r_y, r_z alors la matrice de $\mathbf{f}$ dans cette base est donnée ci-dessous. Réciproquement toute application dont la matrice est de cette forme a un vecteur caractéristique $\mathbf{R}$ de coordonnées r_x, r_y, r_z.

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. L'application est clairement antisymétrique si la matrice est de la forme indiquée ci-dessus.
Montrons que $\mathbf{R}$ est unique. Soit $\mathbf{R}_1$ et $\mathbf{R}_2$, deux vecteurs caractéristiques. On a alors $(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u} \in E^3$. On en déduit donc que $\mathbf{R}$ est unique.
Comment trouver $\mathbf{R}$?
Soit une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit un vecteur de composantes $(a,\ b,\ c)$ dans la base de travail. L'image de ce vecteur par $\mathbf{f}$ est donc un vecteur $(-a_x a - a_y c,\ a_x a - a_z c,\ a_y a + a_z b)$ qui est à comparer à $\mathbf{R} \wedge \mathbf{u}$ égal à $(-r_x a - r_y c,\ r_x a - r_z c,\ r_y a + r_z b)$. Les composantes de $\mathbf{R}$ sont donc : $(-a_x,\ a_y,\ a_z)$. □

Théorème 12.2

Si $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ sont les vecteurs unitaires d'une base orthonormée de E^3 alors le vecteur $\mathbf{R} = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \mathbf{e}_\mathrm{i} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{e}_\mathrm{i})$ est le vecteur caractéristique de l'application $\mathbf{f}$.

DÉMONSTRATION.

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \mathbf{e}_\mathrm{i} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{e}_\mathrm{i}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \mathbf{e}_\mathrm{i} \wedge (\mathbf{R} \wedge \mathbf{e}_\mathrm{i}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} (\mathbf{e}_\mathrm{i}.\mathbf{e}_\mathrm{i})\mathbf{R} - (\mathbf{e}_\mathrm{i}.\mathbf{R})\mathbf{e}_\mathrm{i} = 2\mathbf{R}.$$

□

12.7 VECTEURS LIÉS, LIBRES

Définition

On appelle vecteur lié, ou pointeur, un vecteur tracé à partir d'un point (vecteur vitesse par exemple). On note (A, $\mathbf{u}$) le vecteur lié d'origine A et de vecteur libre $\mathbf{u}$. On appelle vecteur glissant un ensemble de vecteurs liés dont l'origine A appartient à une droite parallèle au vecteur lié.

12.8 Champ de moment

On définit le champ de moment d'un vecteur glissant (A, $\mathbf{u}$) par :

$$\mathbf{M}(A, \mathbf{u}) = \mathbf{MA} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{AM} \wedge \mathbf{u} \quad \forall M.$$

Théorème 12.3

Tous les vecteurs liés d'un même vecteur glissant ont le même champ de moment.

Définition

Un champ de vecteur $\mathbf{M}(A)$ (application de l'espace affine sur l'espace vectoriel) qui associe un vecteur à un point est antisymétrique si il existe un point O et une application antisymétrique $\mathbf{f}$ tels que :

$$\mathbf{M}(P) = \mathbf{M}(O) + \mathbf{f}(\mathbf{OP}) = \mathbf{M}(O) + \mathbf{R} \wedge \mathbf{OP} \quad \forall P.$$

Théorème 12.4

Pour qu'un champ $\mathbf{M}$ soit antisymétrique, il faut et il suffit qu'il soit équiprojectif.

Démonstration. Commençons par démontrer qu'un champ antisymétrique est équiprojectif. Puisque $\mathbf{M}$ est un champ équiprojectif, on sait qu'une fonction $\mathbf{f}$ antisymétrique existe ; elle est telle que :

$$\mathbf{M}(P) = \mathbf{M}(O) + \mathbf{f}(\mathbf{OP}) \quad \forall P \in \mathcal{E}^n, \mathbf{M}(Q) = \mathbf{M}(O + \mathbf{f}(\mathbf{OQ}) \quad \forall Q \in \mathcal{E}^n.$$

On en déduit par soustraction des deux égalités :

$$\mathbf{M}(P) - \mathbf{M}(Q) = \mathbf{f}(\mathbf{OP}) - \mathbf{f}(\mathbf{OQ}) = \mathbf{f}(\mathbf{QP}).$$

Ceci correspond bien à la relation de champ de moment. Comme $\mathbf{f}$ est antisymétrique on a :

$$\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{PQ}) = -\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{PQ}).$$

On en déduit immédiatement que :

$$\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{M}(P) = \mathbf{PQ} \cdot \mathbf{M}(Q) \quad \forall P \text{ et } Q \in \mathcal{E}^n.$$

ce qui correspond à la propriété recherchée qui peut, en dimension trois, se traiter directement avec le produit vectoriel.

Il faut maintenant démontrer la réciproque, à savoir que l'équiprojectivité implique l'antisymétrie. Soit la propriété :

$$\mathbf{PQ} \cdot \mathrm{M(P)} = \mathbf{PQ} \cdot \mathrm{M(Q)} \quad \forall \mathrm{P} \text{ et } \mathrm{Q} \in \mathcal{E}^{n}.$$

On prend un point O et on écrit :

$$(\mathbf{OP} - \mathbf{OQ}) \cdot \mathrm{M(P)} = (\mathbf{OQ} - \mathbf{OP}) \cdot \mathrm{M(Q)}.$$

On a aussi $\mathbf{OP} \cdot \mathrm{M(P)} = \mathbf{OP} \cdot \mathrm{M(O)}$ et $\mathbf{OQ} \cdot \mathrm{M(Q)} = \mathbf{OQ} \cdot \mathrm{M(O)}$, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{OQ} \cdot (\mathrm{M(O)} - \mathrm{M(P)}) = \mathbf{OP} \cdot (\mathrm{M(Q)} - \mathrm{M(O)}).$$

À ce stade, nous définissons une application $\mathbf{f}$ telle que $\mathbf{f}(\mathbf{OM} = \mathbf{M}(\mathrm{M}) - \mathbf{M}(\mathrm{O})$. On peut alors réécrire l'égalité ci-dessus :

$$\mathbf{OQ} \cdot (-\mathbf{f}(\mathbf{OP})) = \mathbf{OP} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{OP}) = -\mathbf{OQ} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{OP}).$$

On vient de montrer que l'application $\mathbf{f}$ en question est antisymétrique et telle que $\mathbf{M}(\mathrm{M}) = \mathbf{M}(\mathrm{O}) + \mathbf{f}(\mathbf{OM})$. □

12.8.1 Opérations sur les torseurs

Égalité : deux torseurs sont égaux si les éléments de réduction en un même point sont égaux.

Somme : la somme (en un même point) de deux torseurs est un torseur.

Produit : on appelle produit (comoment) de deux torseurs la grandeur scalaire :

$$\{\mathcal{T}_1\} \cdot \{\mathcal{T}_2\} \quad = \quad \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{M}_2(\mathrm{A}) + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{M}_1(\mathrm{A}) \quad \forall \mathrm{A}.$$

Cette grandeur scalaire ne dépend pas du point A utilisé pour le calcul. La démonstration est aisée en prenant un point B et la relation de torseur.

La quantité $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}$ qui est l'auto moment du torseur est un invariant (qui ne dépend pas du point).

12.8.2 Glisseur

Définition

On appelle glisseur, un torseur $\{\mathcal{T}\}$, s'il existe au moins un point A tel que $\mathbf{M}(\mathrm{A}) = \mathbf{0}$.

Cela correspond en cinématique à un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. En effet, pour tout point A situé sur l'axe, $\mathbf{v}(\mathrm{A}) = \mathbf{0}$.

12.8.3 Couple

Définition

On appelle couple, un torseur $\{\mathcal{T}\}$, si la résultante $\mathbf{R}$ est nulle.

Cela correspond en cinématique à un mouvement de translation pour lequel on ne peut pas trouver de point à vitesse nulle.

12.8.4 Décomposition d'un torseur

Théorème 12.5

Tout torseur $\{\mathcal{T}\}$ constitué d'une résultante $\mathbf{R}$ et d'un moment $\mathbf{M}(\mathrm{M})$ se décompose de façon unique en la somme d'un glisseur et d'un couple. On peut toujours écrire (avec $R^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$) :

$$\mathbf{M}(\mathrm{M}) = \frac{\mathbf{M}(\mathrm{M}) \cdot \mathbf{R}}{R^2}\mathbf{R} + \mathbf{M}(\mathrm{M}) - \frac{\mathbf{M}(\mathrm{M}) \cdot \mathbf{R}}{R^2}\mathbf{R}.$$

Le premier terme définit le champ d'un couple, le second celui d'un glisseur.

DÉMONSTRATION. Si on prend le premier terme, il faut montrer que le moment est indépendant du point. Soient M et N deux points. On a alors :

$$\mathbf{M}(\mathrm{M}) = \frac{(\mathbf{M}(\mathrm{N}) + \mathbf{MN} \wedge \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}}{R^2}\mathbf{R} = \frac{\mathbf{M}(\mathrm{N}) \cdot \mathbf{R}}{R^2}\mathbf{R} = \mathbf{M}(\mathrm{M}).$$

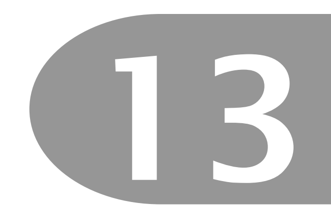
On montre de la même façon que le second terme est associé à un glisseur. En effet :

$$\left\{\mathbf{M}(\mathrm{M}) - \frac{\mathbf{M}(\mathrm{M}) \cdot \mathbf{R}}{R^2}\mathbf{R}\right\} \cdot \mathbf{R} = 0.$$

ce qui définit un glisseur. □

12.9 Axe d'un torseur

On appelle axe d'un torseur, l'ensemble des points A tels que $\mathbf{R}$ est colinéaire à $\mathbf{M}(\mathrm{A})$, c'est à dire tels que $\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}(\mathrm{A}) = \mathbf{0}$.
L'axe d'un torseur de résultante $\mathbf{R}$ est un axe parallèle à $\mathbf{R}$.



ÉLÉMENTS SUR LES TENSEURS

Pour ce cours, nous allons travailler une base orthonormée ce qui autorise une grande simplification de la présentation. Le lecteur intéressé par des détails, en particulier pour la mécanique des milieux continus, se référera aux nombreux ouvrages disponibles.

Soit un espace vectoriel euclidien E^3.

Un tenseur d'ordre un est un vecteur $\mathbf{v}$ de E. A chaque vecteur $\mathbf{v}$ de E on peut associer une forme linéaire ϕ telle que :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \in \mathrm{R}.$$

Le vecteur position $\mathbf{OM(t)} = \phi(\mathbf{OM(t_0)}, t))$, la vitesse lagrangienne $\mathbf{V}(\mathrm{M/R}, t)$ sont des exemples de tenseur d'ordre un tout comme le vecteur effort.

La multiplication ou produit tensoriel de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est notée $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$. On y associe la forme bilinéaire telle que :

$$\forall(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E}, \quad (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}) \in \mathrm{R}.$$

Ce produit tensoriel est distributif par rapport à la multiplication et à l'addition mais il n'est pas commutatif.

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}.$$

On peut alors construire à partir de la base de E un espace vectoriel noté $\mathrm{E} \otimes \mathrm{E}$ de base $\mathbf{e}_\mathrm{i} \otimes \mathbf{e}_\mathrm{j}$. Attention néanmoins à cette construction de la base qui n'est pas canonique. Nous n'entrons pas dans les détails.

Un tenseur euclidien d'ordre deux $\underline{\underline{T}}$ est défini par :

1. Un élément de l'espace tensoriel $\mathrm{E} \otimes \mathrm{E}$:

$$\underline{\underline{T}} = T_{\mathrm{ij}}(\mathbf{e}_\mathrm{i} \otimes \mathbf{e}_\mathrm{j}).$$

2. Une forme bilinéaire sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ telle que :

$$\forall(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E}, \quad \underline{\underline{T}}(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = T_{\mathrm{ij}}(e_\mathrm{i} \otimes e_\mathrm{j})(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = T_{\mathrm{ij}}(e_\mathrm{i} \cdot \mathbf{u})(e_\mathrm{j} \cdot \mathbf{v}).$$

3. Un élément associé à une application linéaire ϕ de E dans E. Soit l'application qui au vecteur $\mathbf{x}$ associe le vecteur $\phi(\mathbf{x})$; on définit le tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$ par :

$$\underline{\underline{T}} = \phi(\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j = (\phi_{ij}\mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_j = \phi_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j).$$

Les composantes de $\underline{\underline{T}}$ sont égales aux composantes de la matrice de l'application linéaire ϕ dans la base considérée.

Le point entre $\underline{\underline{L}}$ et $\mathbf{x}$ correspond au produit contracté et peut se calculer par le produit d'une matrice avec un vecteur dans une base de travail orthogonale choisie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ notée par la suite $(\mathbf{e}_i)$. Soit L la matrice représentant ce tenseur dans la base $(\mathbf{e}_i)$ et L_{ij} ses composantes. Soient x_i les composantes de $\mathbf{x}$ dans la même base on a :

$$\underline{\underline{L}} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i,j} L_{ij} x_j \mathbf{e}_j.$$

On définit le produit tensoriel noté $\otimes$ de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ par :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}.$$



Champ équiprojectif

Un champ de vecteur $\mathbf{v}$ est équiprojectif si : $\forall$A, $\forall$B $\quad \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{AB}$

Torseur

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_A \end{array} \right\}.$$

1. $\mathbf{R}$ (résultante), $\mathbf{M}$ (champ des moments) tel que :

$$\forall A, \forall B \quad \mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{R} \wedge \mathbf{AB}.$$

2. Le champ des moments d'un torseur est équiprojectif.

Produit de deux torseurs définis au même point A

$$\{\mathcal{T}\} \cdot \{\mathcal{T}\}' = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_A \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_A \end{array} \right\} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}'_A + \mathbf{R}' \cdot \mathbf{M}_A.$$

Invariants du torseur

1. Premier invariant : La résultante $\mathbf{R}$.
2. Second invariant : La projection du moment du torseur sur sa résultante.

Axe et point centraux

Un point est dit central pour le torseur $\{\mathcal{T}\}$ si en ce point son moment et sa résultante ont même direction. Les points centraux s'alignent sur un axe, dit axe central. La norme du moment est minimale sur l'axe central. La direction de l'axe central est celle de la résultante, et l'axe passe par le point H, défini à partir d'un point A quelconque par :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_{\mathrm{A}} \end{array} \right\} \text{ et } \mathbf{AH} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{MA}}{\mathbf{R}^2}.$$

a) Changement de base de dérivation

Si le mouvement d'une base $\mathrm{R}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ par rapport à un référentiel $R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est défini par trois angles $(\alpha_{\mathrm{k}}, (\mathrm{k} = 1, 3)$:

1. Dérivée des vecteurs de la base R_1 par rapport au référentiel R :

$$\left.\frac{\partial \mathbf{x}_{\mathrm{i}}}{\partial \alpha_{\mathrm{k}}}\right|_{\mathrm{R}} = \mathbf{e}_{\mathrm{k}} \wedge \mathbf{x}_{\mathrm{i}}.$$

2. Vecteur vitesse de rotation de R_1/R :

$$\mathbf{\Omega}(\mathrm{R}_1/\mathrm{R}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{3} \frac{\mathrm{d}\alpha_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t} \mathbf{e}_{\mathrm{k}}.$$

3. Composition des rotations :

$$\mathbf{\Omega}(\mathrm{R}_3/\mathrm{R}_1) = \mathbf{\Omega}(\mathrm{R}_3/\mathrm{R}_2) + \mathbf{\Omega}(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1).$$

4. Changement de base de dérivation :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1} + \mathbf{\Omega}(\mathrm{R}_1/\mathrm{R}) \wedge \mathbf{v}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bône J.-C., Morel J. et Boucher M., *Mécanique générale*, Dunod, 507 p, 1994.

[2] Rougée P., *Mécanique générale*, Vuibert (Vuibert université), ISSN : 0290-4403, 336 p, 1982.

[3] Berthaud Y., Baron C., Bouchelaghem F., Daunay B., Le Carrou J.-L. et Sultan E., *Mini-manuel de Mécanique des solides*, Dunod, 234 p, 2009.

[4] Brossard J.-P., *Mécanique générale*, INSA de Lyon ; http//docinsa.insa-lyon.fr (page consultée en juin 2009).

[5] Devel M., *Cours de mécanique du solide*, http://www.infotheque.info/ressource/6586.html (page consultée le 15 janvier 2009).

[6] Agati P., Brémont Y. et Delville G., *Mécanique du solide - applications industrielles*, 2e édition, Dunod, 302 p, 2003.

[7] Granjon Y., *Mécanique du solide*, Dunod, 160 p, 2002.

[8] Site du bureau international des Poids et Mesures : http: ://www.bipm.org/fr/home/.

[9] Mesure de force et de couple - Capteurs de force (partie 1), Dossier Techniques de l'ingénieur : R1820, 06/2008 et Capteurs de couple (parie 2) Dossier : R1821, 12/2008, Mesures mécaniques et dimensionnelles, articles rédigé par le Groupement pour l'avancement des méthodes d'analyse des contraintes.

[10] Lagrange J.-L., *Mécanique analytique*, Tome 1, Ed Mallet Bachelier, 1853.

[11] Duhem P., *Les origines de la statique*, Tome 1, Ed. Jacques Gabay, 1905.

[12] Chevalier A., *Guide du dessinateur industriel, pour maîtriser la communication technique*, Hachette Technique, 1996.

INDEX

G

H

L

M

P

R

S

T

V